图论与网络流

GRAPH THEORY AND NETWORK FLOW

编



中国铁道出版社

图论与网络流

蒋长浩　编

中国林业出版社

图书在版编目（CIP）数据

图论与网络流/蒋长浩编. 一北京：中国林业出版社，2001.7
ISBN 7-5038-2822-6

Ⅰ.图… Ⅱ.蒋… Ⅲ.①图论②网络流 Ⅳ.0157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 038399 号

出版：中国林业出版社（100009 北京西城区刘海胡同 7 号）
E-mail：cfphz@public.bta.net.cn 电话：66184477
发行：新华书店北京发行所
印刷：北京地质印刷厂
版次：2001 年 7 月第 1 版
印次：2001 年 7 月第 1 次
开本：787mm×960mm 1/16
印张：14.5
字数：268 千字
印数：1～5000 册
定价：22.80 元

前 言

图论是组合数学的一个主要组成部分，近几十年里，它已经发展成为数学的一个重要分支。由于图论的本身魅力和其在信息社会中一些学科领域诸如计算机、运筹学、系统工程以及物理学、电子学、生物学、化学等方面的广泛应用，因此，越来越受科学界尤其是数学界的重视和关注。

本书作为图论教材，主要强调的还是图的基础理论，内容主要包括图的基本概念，图的连通性，树，Euler 图和 Hamilton 图，图的嵌入，独立集、覆盖和支配集，图的染色，极图理论和 Ramsey 理论，有向图，最后简单地介绍了网络流理论。

本书选择的内容还是比较丰富的，但作为每周 3～4 课时的一学期教程也是很容易设计的，只要挑选一些重要的和学生们所喜爱的内容，例如：某些冗长乏味的定理证明可以省略，又如第二章图的连通性对于 n-连通，n-边连通，Menger 定理可用 1～2 个课时作一些一般介绍，对某些应用和算法也可以根据不同专业少讲或不讲。

近十年来，我曾多次讲授数学系的图论课，也参阅了不少国内外的优秀教材，书中写进了自己的一些研究成果和教学体会，包括教材内容的编排顺序。但由于水平有限，经验不足，相信一定也有不少错误，恳请读者批评指正。

在本书即将出版的时候，我要非常感谢一直关注着这本书的华东师范大学的洪渊教授和束金龙副教授，以及湖州师院方坤夫副教授。洪渊老师审阅了初稿并提出了修改意见。我尤其要感谢张建勋教授，他来宁波大学工作也使得这本书得以早日定稿，他同骆建宁副教授、臧运华副教授一起对初稿进行了认真的校对并就有关内容同编者一起进行了仔细的讨论。

这本书从初稿到定稿的全部打印都是由周彩莲老师完成的，我对她的辛勤工作怀着深深的感激之情。我还要感谢浙江省师范院校的系主任们，是他们的关心促使我下决心来完成这项工作。

编 者

2000 年 12 月

目　录

1 图

在现实世界的许多场合中，经常会遇到在有限个元素之间是否存在某种联系或它们有怎样的联系。如果这有限个元素有联系且联系是对称的，我们就能用图来模拟这种情况，所以图实际上是经常碰到的。现在就从这个概念出发，来开始我们的研究。

1.1 图的概念

在给图下确切定义以前，我们先举几个例子。

假设某航空公司要为国内几个重要城市提供服务。该航空公司有一张航空线路图，如果两个城市之间有该航空公司的直达航班，那么航空线路图中应该有一条线来连接这两个城市，现在我们取消具体城市的名称，这个模型就是我们要研究的图，代表城市的小圈就是我们所说的图的顶点，而连接两个城市的航线就是我们所说的图的边，我们乘坐该航空公司的航班能否从一个城市到达另一个城市，这就是图论中所谓图的连通问题。如果我们再在图的边上标上一个正实数来表示两个相应城市之间机票的票价，这样的图就被称为赋权图。我们要从一个城市乘该航空公司的班机到另外一个城市，怎样乘坐飞机使所花的票价最小？实际上这就是图论中求最短路的问题。

作为第二个例子，假设一个公司要扩充业务，需要招聘几个新的职员，这几个职员分别是绘图员，工程师，计算机程序设计员，数据分析员和助理私人秘书各一名。有七个人前来应聘，这些人中每一个人都能胜任一个以上的职务。这种情况能够用图 1.1 所示的图来表示。图中下面的五个点(DRA，ENG，PRO，ANL 和 PER) 用来表示职务，而上面七个点(1，2，…，7) 用来表示应聘的人。如果一个人有能力胜任某个职务，那么在对应的两点之间就画上一条线。值得公司感兴趣的问题为：是否能从这七个人中挑选出五个人来，分别承担这五项工作？用图论的术语，就是我们要问职位集能否"匹配"到应聘的人集。

作为最后一个例子，我们假设有八种供实验用的化学药品(A，B，…，H)

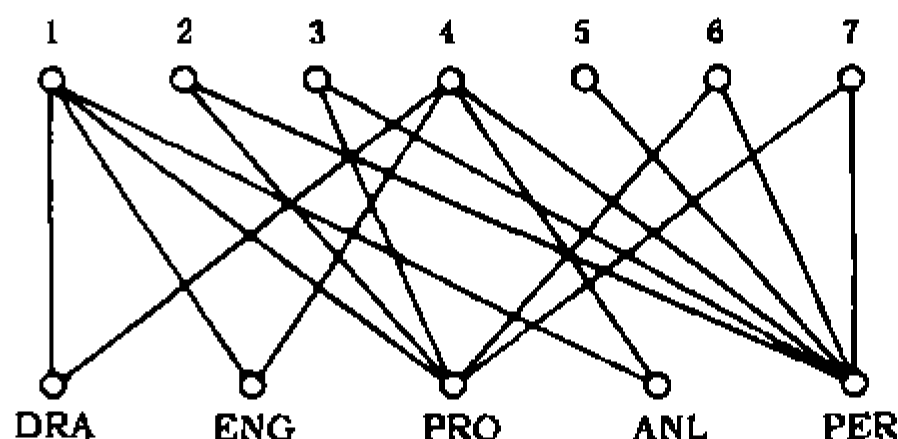


图 1.1 岗位应聘图

需要存放在一个大仓库里，而这些化学药品中某些药品彼此要引起化学反应，当然我们不能把它们存放在同一间房子里。我们用图 1.2 所示的图来模拟这种情况，用一个点来表示一种化学药品，如果两个点之间有线相连，那么就表示相应的化学药品不能被存放在同一个房间里。我们要问为了安全存放八种化学药品需要的最少存放房间是多少？这类问题在图论中尤其感兴趣。到目前为止，解决这类问题的唯一已知算法是很无效的，而且许多数学家也相信对这类问题没有有效的解决方法。

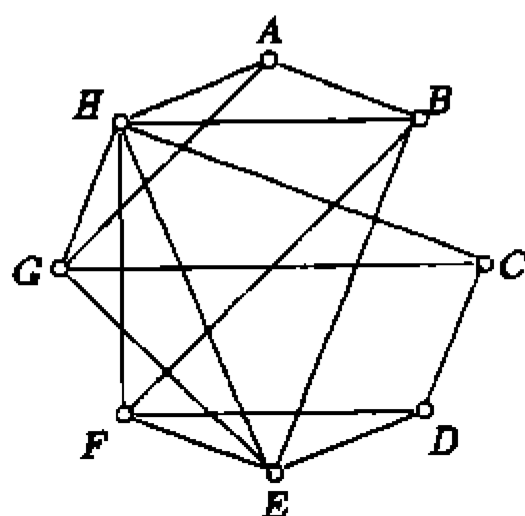


图 1.2 化学药品反应图

我们还能举出很多类似的例子，不过在上面的三个例子中已经不难抽象出图的概念。图 $G=(V(G),E(G))$ 是由元素被称为顶点的一个有限非空集连同被称为边的不同顶点有限无序对集（可能是空集）组成。$V(G)$ 称为 G 的顶点集，而 $E(G)$ 称为 G 的边集。

$e=(u,v)$ 称为连接顶点 u 和 v 的边。如果 $e=(u,v)$ 是图的一条边，那么顶点 u 和 v 被称为是邻接的，v 和 e 称为是相关联的，u 和 e 也是相关联的，且 u 和 v 分别称为 e 的端点。如果 e_1 和 e_2 是 G 中具有一个公共端点的二条不同边，那么 e_1 和 e_2 被称为邻接边。为了方便起见我们通常用 uv 或 vu 来表示边而不用 (u,v)。

一个图 G 的顶点集的顶点个数称为 G 的阶，用 $p(G)$ 或简单地用 p 来表示，而它的边集的基数通常称为 G 的大小，用 $q(G)$ 或 q 表示。一个 (p,q) 图就是阶为 p 和大小为 q 的图。

通常用图形来定义或描述一个图，在所画的图形中一个点（通常画一个小圈）来表示图的一个顶点，而边 $e=uv$ 用一条线段或者曲线来连接相应于 u 和

v 的点。

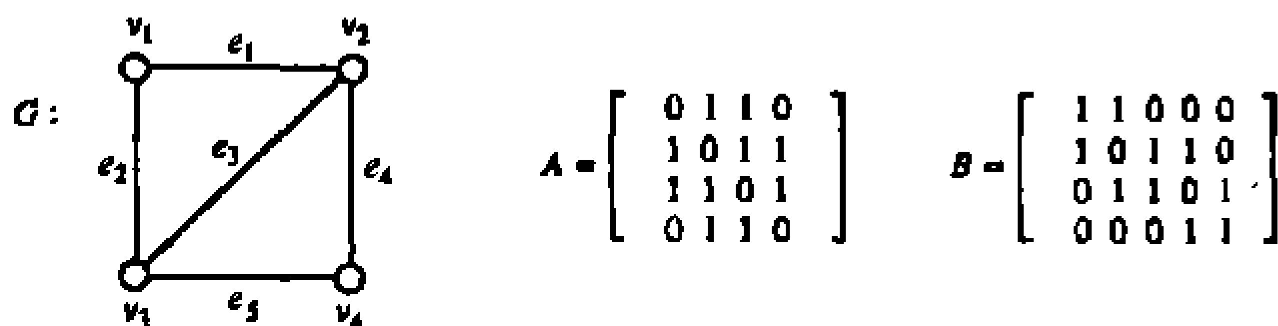
具有顶点集 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$ 和边集 $E(G)=\{e_1,e_2,\cdots,e_q\}$ 的图 G 也能用矩阵的方法来表示。图 G 的邻接矩阵 $A(G)=[a_{ij}]_{p\times p}$ 定义为

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & v_iv_j\in E(G)\\ 0 & v_iv_j\notin E(G)\end{cases}$$

这样，一个图 G 的邻接矩阵是一个对称(0,1)矩阵且主对角线上元素是零。图 G 的关联矩阵 $B(G)=[b_{ij}]_{p\times q}$ 定义为

$$b_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如果顶点 } v_i \text{ 和边 } e_j \text{ 相关联}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

例如，由顶点集 $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ 和边集 $E(G)=\{v_1v_2,v_1v_3,v_2v_3,v_2v_4,v_3v_4\}$ 所定义的图，用画图的方法，邻接矩阵和关联矩阵方法来表示就如图 1.3 所示。



$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\1&0&1&1&0\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

图 1.3 一个图的邻接矩阵和它的关联矩阵

如果人们用计算机想得到某种信息或者解决一个与图有关的问题。图的邻接矩阵和它的关联矩阵表示法常常是相当方便的。另一方面，图的邻接矩阵和关联矩阵中也包含了大量多余数据，如大量的 0 和重复出现的 1。正是由于邻接矩阵和关联矩阵的这一不能令人满意的特性，在将图输入计算机的时候，我们也可以采取其它的方式。例如：可以采用输入图的所有边和它的阶；也可以采用输入邻接数组(即对于图中每一个给定的顶点，所有与它邻接的顶点的点列)等等。当然，还存在其它一些输入方式，具体采用什么方式，可根据需要计算机解决的问题和选择的算法来确定。

两个图常常有同样的结构，只是它们的顶点和边标号不同或者画的方式不一样。为了使这种想法更确切，我们引进图同构的概念，设 G_1 和 G_2 为两个图。若 $V(G_1)=V(G_2)$ 且 $E(G_1)=E(G_2)$，则称 G_1 和 G_2 恒等，记为 $G_1=G_2$。若存在一一映射 $\varphi:V(G_1)\to V(G_2)$ 使得 φ 保持邻接性，即 $uv\in E(G_1)$ 当且仅当 $\varphi(u)\varphi(v)\in E(G_2)$，则称为 G_1 和 G_2 是同构的，记为 $G_1\cong G_2$ 而且一一映射 φ 称为 G_1 到 G_2 的同构映射或简称为同构。容易看出“同构”是图上的一个等价关系，这种关系把全部图集分成等价类。两个图是不同构的，如果它们属于不

同的等价类。

在图 1.4 中，每个图 $G_i(i=1,2,3)$ 都是一个(6,9)图，而且 G_1 和 G_2 是同构的。

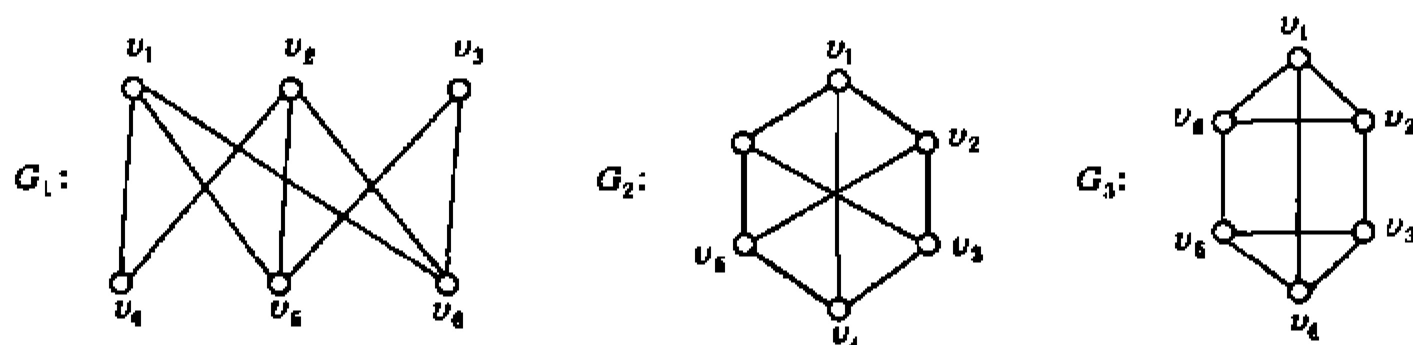


图 1.4 同构和不同构图

例如由：$\varphi(v_1)=v_1, \varphi(v_2)=v_3, \varphi(v_3)=v_5, \varphi(v_4)=v_2, \varphi(v_5)=v_4$ 和 $\varphi(v_6)=v_6$ 定义的映射 $\varphi: V(G_1)\to V(G_2)$ 是一个同构映射。另一方面，$G_1\not\cong G_3$，因为 G_3 包含了三个互相邻接的顶点而 G_1 没有三个互相邻接的顶点，当然 $G_2\not\cong G_3$。

如果 G 是一个(p,q)图，那么 $p\geq 1$ 且 $0\leq q\leq p(p-1)/2$。如果(p,q)图 G 的阶为 1，则称 G 为平凡图，否则称为非平凡图。显然，(1,0) 图是唯一的一个平凡图，且每个非平凡图必有阶 $p\geq 2$。

除了图的阶和大小以外，在对图研究中，人们最经常碰到的数是它的顶点度。图 G 的顶点 v 的度是在 G 中与 v 关联的边数，G 的一个顶点 v 的度用 $\deg_G(v)$ 表示或者简写为 $\deg(v)$。如果用 $N_G(v)$（或者简记为 $N(v)$）表示 G 中所有与 v 相邻接的顶点集，那么 $\deg_G(v)=|N_G(v)|$。设 G 为任意一个图，G 的所有顶点度的最大值称为 G 的最大度，记为 $\Delta(G)$；G 的所有顶点度的最小值称为 G 的最小度，记为 $\delta(G)$。一个顶点被称为奇顶点或偶顶点取决于它的度是奇数还是偶数。图 G 中度为 0 的顶点称为孤立点，而度为 1 的顶点称为悬挂点。在图 1.5 中表示了一个图 G 及它的顶点的度。

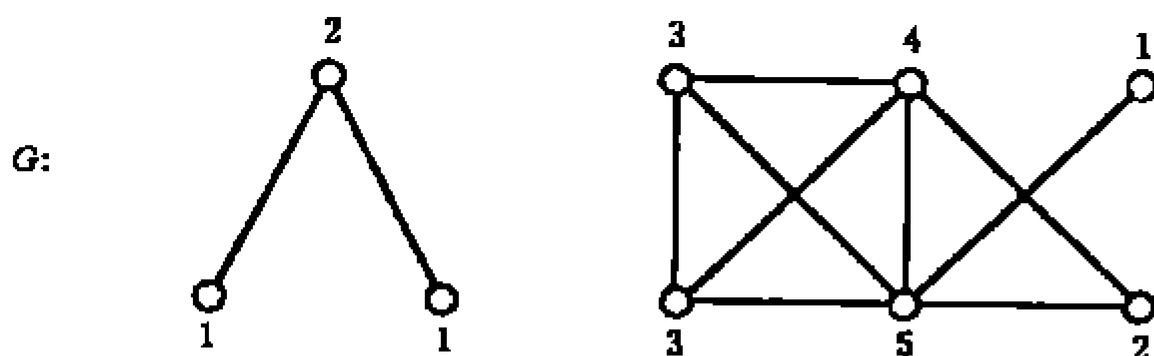


图 1.5 一个图的顶点的度

注意到图 1.5 所示的图 G 的阶 $p=9$，大小 $q=11$，而它的 9 个顶点的度之和为 22，恰好为图 G 边数的 2 倍，即 $2q$。这个事实不仅仅是巧合，事实上每条

边与两个顶点关联，所以当对图G的全部顶点的度求和时，每条边重复计算两次。这是我们要碰到的第一个定理，有时我们确实就把它称为“图论第一定理”。

定理1.1 设G是一个具有顶点集$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$的$(p,q)$图，那么

$$\sum_{i=1}^{p}\deg(v_i)=2q。$$

这个结果有一个称为“握手引理”的有趣的推论。

推论1.1 任意一个图总有偶数个奇顶点。

证明 设G是任意一个大小为q的图，W是G的奇顶点的集，且U为偶顶点的集，由定理1.1可得

$$\sum_{v\in V(G)}\deg(v)=\sum_{v\in W}\deg(v)+\sum_{v\in U}\deg(v)=2q。$$

显然$\sum_{v\in U}\deg(v)$是偶数，所以$\sum_{v\in W}\deg(v)$也是偶数，这意味着$|W|$是偶数，从而证明了这个推论。■

推论1.1之所以被称为“握手引理”是因为推论1.1可形象地陈述为在一次集会中进行了奇数次握手的人数为偶数。

我们把在一次集会中的人作为图的顶点，两个顶点之间有边相连当且仅当相应于这两个顶点的人在这次集会中握过手，那么与一个顶点关联的边数（即顶点的度）为与这个人握过手的人数，如果这个顶点是奇顶点，则说明这个人与奇数个人握过手，即进行了奇数次握手，由推论1.1，奇顶点的个数为偶数，故进行了奇数次握手的人数为偶数。

通常在研究一个图时，需要考虑一个包含它的某个更大的图或者一个包含在它中的更小的图。设H和G为两个图。如果$V(H)\subseteq V(G)$且$E(H)\subseteq E(G)$，则称H是G的一个子图，称G是H的一个母图。如果G和H是两个图，且均包含未标号的顶点，那么H也可称为G的子图，如果存在一种所有未标号顶点的标号方式使得，$V(H)\subseteq V(G)$且$E(H)\subseteq E(G)$。如果H是G的子图，那么记为$H\subseteq G$。如果$H\subseteq G$且$H\neq G$，则称H为G的一个真子图，记为$H\subset G$。

图G的最简单的一类子图，可通过删去顶点或边来得到，如果$v\in V(G)$且$|V(G)|\geq 2$，那么从G中删去顶点v以及所有与v关联的边后得到的G的子图记为$G-v$。如果$e\in E(G)$，那么从G中删去边e得到的G的子图记为$G-e$。类似地，可定义从G中删去一个顶点子集或边子集，图1.6描述了这些概念。



图 1.6 删去图的一个元素

如果 u 和 v 是图 G 的不邻接顶点，那么 $G+f$(其中：$f=uv$) 表示向 G 中添加一条边 f 得到的图，显然，$G \subseteq G+f$。

我们看到 $G-e$ 与 G 有同样的顶点集，且 G 与 $G+f$ 也有同样的顶点集。若图 G 的一个子图 H 和 G 有同样的阶，那么 H 被称为 G 的生成子图。

我们将碰到的最重要一类子图是所谓“导出子图”。如果 U 是图 G 顶点集 $V(G)$ 的一个非空子集，那么 G 的以 U 为顶点集，以 G 的所有两个端点都属于 U 的边为边集的子图称为 G 的由 U 导出的子图或者称为 G 的导出子图或者称为由 U 导出的，记为 $\langle U\rangle$。如果 H 是 G 的子图，且存在 $V(G)$ 的非空子集 U 使得 $H=\langle U\rangle$，那么称子图 H 是顶点导出的，记作 $H<G$。类似地，如果 F 是 $E(G)$ 的一个非空子集，那么由 F 导出的子图 $\langle F\rangle$ 满足顶点集是所有与 F 中至少一条边相关联的顶点组成的集且边集是 F。图 G 的一个子图 H 是边导出的，如果存在 $E(G)$ 的一个非空子集 F 使得 $H=\langle F\rangle$。这些定义的一些简单结果是：图 G 的每一个导出子图能够通过从 G 中删去若干个顶点得到，而图 G 的每个子图都能够通过从 G 中删去若干个顶点和若干条边得到。图 1.7 说明了关于图 G 的这些概念。这里 $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$，$U=\{v_1,v_2,v_5\}$ 且 $F=\{v_1v_4,v_2v_5\}$。

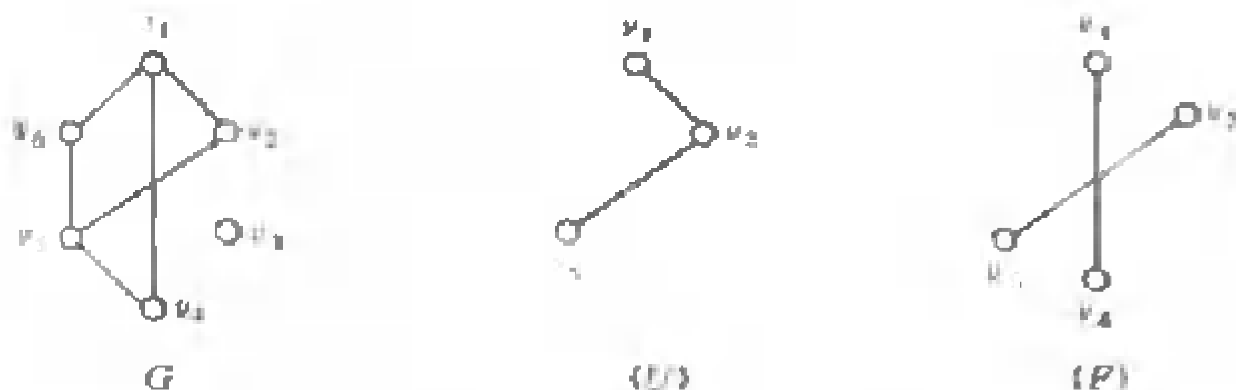


图 1.7 顶点导出子图和边导出子图

有几类图经常出现值得特别指出，且在某些情况下有特殊的记法。在这节里，我们将给出最常见的几种。

如果一个图的每个顶点 v 都有 $\deg(v)=r$，那么称这个图是 r-度正则的，也称该图为 r-正则图。称 3-正则图为三次图。如果一个图的任意两个顶点都

是邻接的，则该图称为完全图，用 K_p 来表示.因此，一个(p,q)图是完全图当且仅当它为$(p-1)$正则图，即$q=p(p-1)/2$.图1.8给出了所有不同构的4阶正则图，其中G是完全图，即$G\cong K_4$。

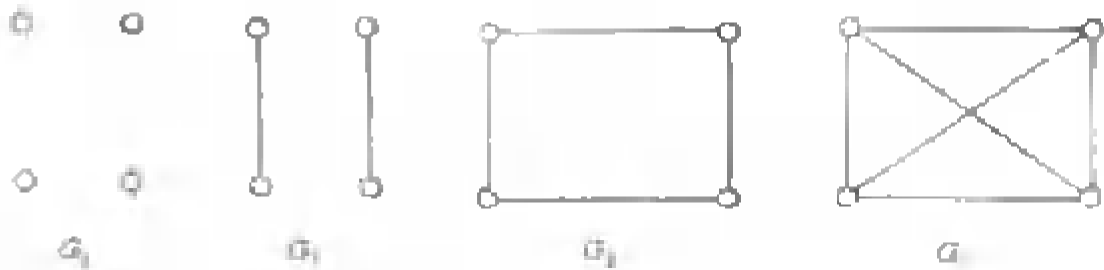


图1.8 4阶正则图

如果两个具有相同顶点集V的图G和H满足$uv\in E(G)$当且仅当$uv\notin E(H)$，则称图G和图H是互补的。称图H为图G的补图，记为$H=\overline{G}$.由补图的定义可知：如果G是一个(p,q)图，那么$\overline{G}$是一个$(p,\overline{q})$图(其中：$q+\overline{q}=p(p-1)/2$).在图1.8中，G_0和G是互补的，G_1和G_2也是互补的。完全图K_p的补图$\overline{K}_p$是仅有p个顶点而没有边的图，称$\overline{K}_p$为p阶空图.如果图G的补图$\overline{G}$与G是同构的，则称G是自补图.

如果图G的顶点集$V(G)$能够被分成$n(n\geq 1)$个不交子集$V_1,V_2,\cdots,V_n$的并，且$E(G)$中每一条边的两个端点分别属于不同子集，那么称图G为n-部图，且称$V_i(1\leq i\leq n)$为G的部分集.如果G是一个p阶1-部图，那么$G\cong\overline{K}_p$，为p阶空图。2-部图也称为二部图.二部图是一个非常重要的图类，将会经常碰到.图1.9给出了一个二部图G_1，而另一个图G_2实际上恒等于G_1，且G_2的画法刻划了G_1作为二部图的特征。如果G是一个具有顶点集的划分V_1和V_2的正则二部图，那么$|V_1|=|V_2|$(见练习6).

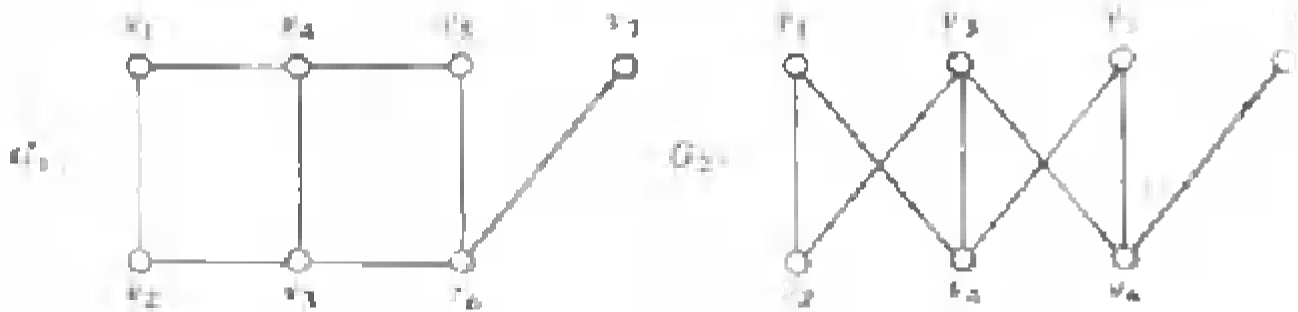


图1.9 一个二部图

如果一个n-部图的n个部分集为$V_1,V_2,\cdots,V_n$，且对于任意$1\leq i<j\leq n$，及任意$u\in V_i$和任意$v\in V_j$，都有$uv\in E(G)$，那么称这个n-部图为完全n-部图。由完全n-部图的定义可得：一个n-部图是完全n-部图当且仅当除同一个部分集的两个顶点以外，该图中任意两个顶点都是邻接的.如果$|V_i|=p_i(1\leq i\leq n)$，则完全n-部图可记为$K_{p_1,p_2,\cdots,p_n}$。注意：在图同构的意义下，p_1，

$p_1,\cdots,p_n$的排列顺序并不重要。若$p_i=1(1\leq i\leq n)$，则完全n部图就是完全图K_n；若$p_i=t(1\leq i\leq n)$，那么该完全n部图为正则图，记为$K_n(t)$；具有部分集V_1和V_2的完全二部图用$K_{m,n}$来表示(其中：$|V_1|=m$，$|V_2|=n$)。图$K_{1,n}$称为星。

为了产生新的图可以有许多种组合图的方式。接下去我们来定义几种图的两元运算。在下列定义中，我们总假设G_1和G_2是具有不交顶点集的两个图。

两个图G_1和G_2的并$G=G_1\cup G_2$为满足$V(G)=V(G_1)\cup V(G_2)$且$E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)$的图。如果图G是图H的n个不交拷贝的并，那么记G为nH。图1.10表示了图$2K_1\cup 3K_2\cup K_{1,3}$。

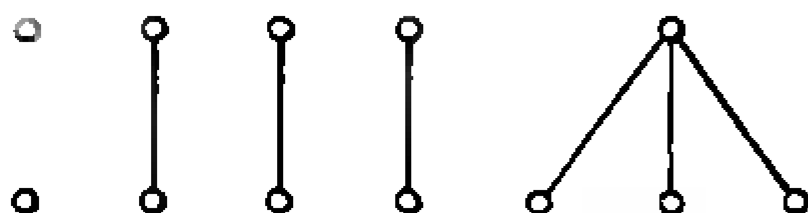


图1.10　图的并

两个图G_1和G_2的联$G=G_1+G_2$为满足$V(G)=V(G_1)\cup V(G_2)$且$E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup\{uv\mid u\in V(G_1),v\in V(G_2)\}$的图。根据联运算的定义可得：$K_{m,n}\cong\overline{K}_m+\overline{K}_n$。图1.11对此作了说明。

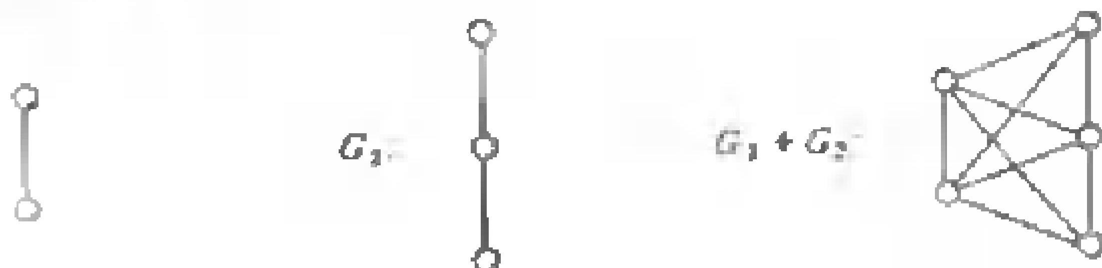


图1.11　两个图的联

两个图G_1和G_2的笛卡儿积$G=G_1\times G_2$为满足$V(G)=V(G_1)\times V(G_2)$，且G的两个顶点(u_1,u_2)和(v_1,v_2)是邻接的当且仅当或者$u_1=v_1$且$u_2v_2\in E(G_2)$或者$u_2=v_2$且$u_1v_1\in E(G_1)$的图。图1.12给出了这种运算的例子。

通过笛卡儿积，可归纳地定义一个重要的图类——n-方体$Q_n(n\geq 1)$：当$n=1$，$Q_1=K_2$；当$n>1$，$Q_n=Q_{n-1}\times K_2$。n-方体Q_n也可以视为顶点用二元n-数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$(即对于任意$1\leq i\leq n$，$a_i=0$或1)进行标号，使得两个顶点是邻接的当且仅当它们对应的n数组恰好在一个位置上不同，即Q_n为空间R^n中单位方体的棱图。Q_3称为立方体图。显然Q_n是阶为2^n的n-正则图。图1.13给出了$n=1,2,3$的方体Q_n及顶点标号。

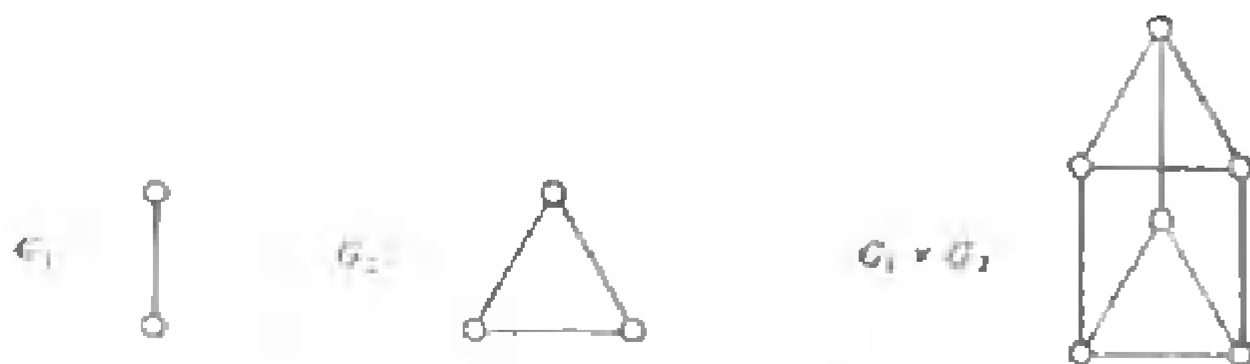


图 1. 两个图的笛卡儿积

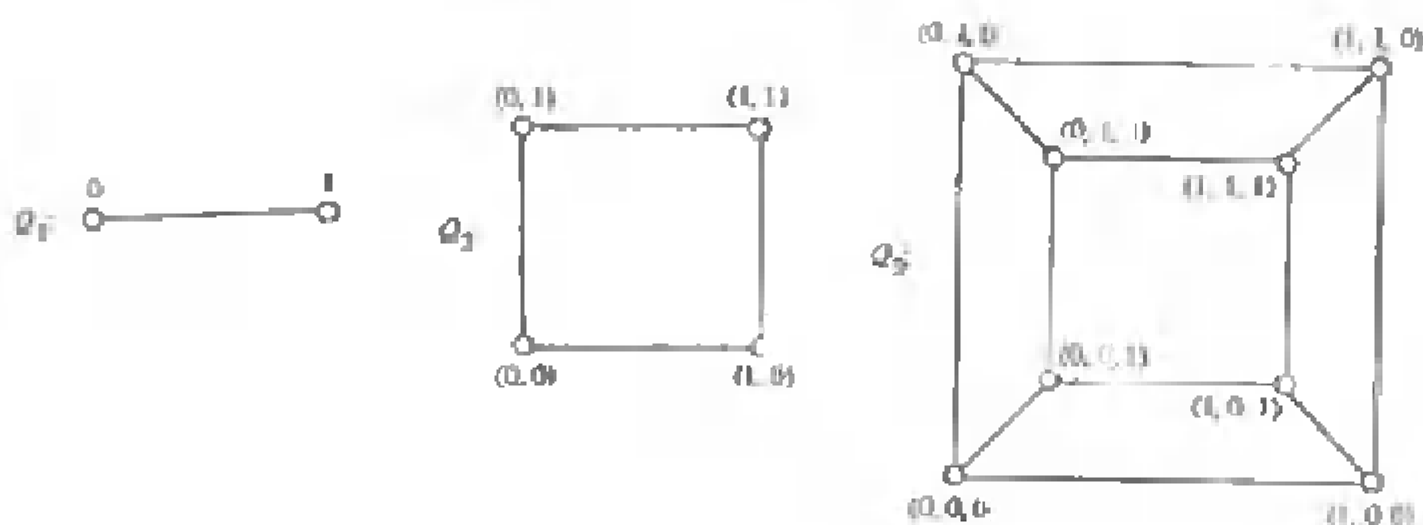


图 1.13 立方图

练习

1. 图1.4给出了两个不同构的(6,9)图。给出另外两个不同构的图 H_1 和 H_2 满足 $p(H_1)=p(H_2)$ 和 $q(H_1)=q(H_2)$。

2. 确定全部不同构的5阶图。

3. 设 p 是给定的正整数，m 和 n 是非负整数使得 $m+n=p$，且 n 是偶数。证明：存在有 m 个偶顶点和 n 个奇顶点的 p 阶图。

4. 确定图1.6所示的图 G 的全部不同构子图；G 有多少个点导出子图？G 有多少个边导出子图？

5. 说明：并非每一个图 G 的所有边导出子图可通过删去 G 的若干条边得到。

6. 证明：如果 G 是一个具有部份集 V_1 和 V_2 的正则偶图，那么 $|V_1|=|V_2|$。

7. 设 G 是一个图，且最大度 $\Delta(G)=n$。证明：存在 G 的母图 H 使 $G \prec H$，且 H 是 n-正则的。

8. 如果 $H \prec G$，能得到 $\overline{H} \prec \overline{G}$ 吗？

9. 证明：存在 p 阶自补图当且仅当 $p \equiv 0 (\mathrm{mod} 4)$ 或 $p \equiv 1 (\mathrm{mod} 4)$。

10. 确定全部阶小于等于 5 的自补图。

11. 设 G 是 p 阶自补图，且 $p \equiv 1 (\mathrm{mod} 4)$。证明：$G$ 至少包含一个度为 $(p-1)/2$ 的顶点。

12. p 阶图 G_1 的特征值是它的邻接矩阵的特征值（即，如果 G 的邻接矩阵为 A，那么 G 的特征值是 p 个（不必不同）满足行列式方程 $\det(\lambda I_p - A) = 0$ 的数。其中 I_p 是 $p \times p$ 单位矩阵）。确定：(a)K_3，(b)$K_{1,2}$ 和 (c)$K_{1,3}$ 的特征值。

1.2 路和圈

设 u 和 v（不必不同）是图 G 的顶点，图 G 的一条 $u—v$ 途径是有限的顶点和边交替序列 $u_0e_1u_1e_2\cdots u_{n-1}e_nu_n(u = u_0, v = u_n)$，满足对于任意的 $i(1 \leq i \leq n)$，$e_i = u_{i-1}u_i$。数 n（途径中出现的边数）称为途径的长度。不含边（即 $n = 0$）的途径称为平凡途径。注意，在一条途径中顶点和边可重复出现。实际上，代表途径的顶点和边的交替序列通常只用顶点序列来代替即可。两条 $u—v$ 途径 $u_0u_1\cdots u_n$ 和 $v_0v_1\cdots v_m(u_0 = v_0 = u, u_n = v_m = v)$ 是相同的当且仅当 $n = m$，且 $u_i = v_i(0 \leq i \leq n)$，否则称它们是不同的。注意，$G$ 的两条不同 $u—v$ 途径完全可能导出 G 的相同子图。一条 $u—v$ 途径，当 $u \neq v$ 时，称为是开的；当 $u = v$ 时，就称为是闭的。一条边不重复的 $u—v$ 途径称为 $u—v$ 迹，而顶点不重复的 $u—v$ 途径称为 $u—v$ 路。由路和迹的定义可知，任意一条路都是一条迹。在图 1.14 所示的图 G 中，$W_1 = v_1v_2v_3v_2v_5v_3v_4$ 是一条 $v_1—v_4$ 途径，但不是迹；$W_2 = v_1v_2v_5v_1v_3v_4$ 是一条 $v_1—v_4$ 迹，但不是路；而 $W_3 = v_1v_3v_4$ 是一条 $v_1 - v_4$ 路。途径 W 包含途径 W' 是指 W' 是 W 的子列。

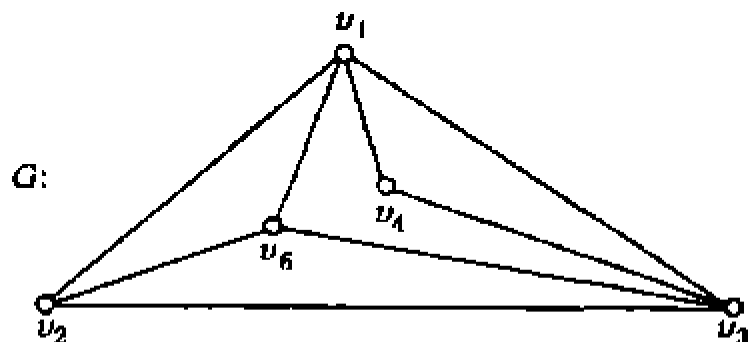


图 1.14 途径，迹和路

根据定义，每一条路是一条途径，一般来说这个命题的逆命题是不正确的。另一方面，我们的确有下面的定理。

定理 1.2 图 G 中每一条 $u—v$ 途径包含一条 $u—v$ 路。

证明 设 W 是 G 中一条 $u—v$ 途径。如果 W 是闭的，结果是显然的。设 $W = u_0u_1u_2\cdots u_n$ 是 G 的一条开途径（其中：$u_0 = u, u_n = v$）。如果 W 中顶点不重复，那么 W 是一条 $u—v$ 路，否则 W 中存在一个顶点至少重复两次。设 i 和 j 是不同正整数$(i < j)$，且 $u_i = u_j$。从 W 中删去子列 $u_{i+1}u_{i+2}\cdots u_j$ 得到一条长度比

W 小的 $u-v$ 途径 W_1。如果 W_1 中没有重复顶点，那么 W_1 是一条 $u-v$ 路。如果不是这种情况，我们继续上述程序，直到最后得到一条是 $u-v$ 路的 $u-v$ 途径。■

正像下面定理指出的那样，一个图的邻接矩阵的 n 次幂能够用来计算图中各种长度的途径数目。

定理 1.3 设 G 为一个图，G 的顶点集 $V(G)=\{v_i \mid 1 \leq i \leq p\}$ 且 A 是图 G 的邻接矩阵。那么 $A^n(n \geq 1)$ 的 (i,j) 项是 G 中长为 n 的不同 v_i-v_j 途径的条数。

证明 对 n 进行归纳。当 $n=1$ 时，由存在一条长为 1 的 v_i-v_j 途径当且仅当 $v_iv_j \in E(G)$，故结果显然成立。设 $A^{n-1}=[a_{ij}^{(n-1)}]$，$a_{ij}^{(n-1)}$ 是 G 中长为 $n-1$ 的不同 v_i-v_j 途径的条数，$A^n=[a_{ij}^{(n)}]$。由 $A^n=A^{n-1}\cdot A$ 可得

$$a_{ij}^{(n)}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}^{(n-1)} a_{kj}\text{。} \tag{1.1}$$

G 中每条长为 n 的 v_i-v_j 途径是可由长为 $n-1$ 的 v_i-v_k 途径(其中：v_k 与 v_j 邻接)加上边 v_kv_j 和顶点 v_j 组成，因此根据归纳假设，等式(1.1)成立。由归纳原理可知，定理结论成立。■

一个图的非平凡闭迹称为 G 的一条回路。若一条回路 $v_1v_2\cdots v_nv_1(n \geq 3)$ 的 n 个顶点互不相同，那么该回路称为圈。没有圈的图称为无圈图。由迹、路、回路和圈的边导出的图 G 的子图也分别称为 G 的迹、路、回路和圈。如果一个圈的长度为偶数，则称该圈为偶圈，否则称为奇圈。长为 n 的圈称为 n-圈。一个 3-圈称为三角形。如果图 G 的阶为 n，且是一条路或一个圈，则 G 分别用 P_n 或 C_n 表示。

我们现在考虑图论中一个最基本的概念，即连通图和不连通图。在图 G 中，如果两个顶点 u 和 v 之间存在一条 $u-v$ 路，则称两个顶点 u 和 v 是连通的。如果 G 中任何两个顶点都是连通的，则称图 G 是连通的或 G 为连通图，否则就称 G 是不连通的或 G 为不连通图。“连通”关系是图 G 顶点集上的等价关系，由每个等价类导出的子图称为 G 的连通分支或简称为 G 的分支。换句话说，图 G 的一个分支是 G 的一个连通子图，且不会作为 G 的其它连通子图的真子图，即 G 的一个分支对连通性来说是一个最大的子图。显然，图 G 的一个连通子图 F 是 G 的一个分支，如果对于 G 的任意一个连通子图 H，由 $V(F) \subseteq V(H)$ 及 $E(F) \subseteq E(H)$ 可得 $F=H$。图 G 的不同连通分支个数称为 G 的分支数，用 $k(G)$ 表示。显然 $k(G)=1$ 当且仅当 G 是连通的。如果连通图 G 是无圈的，则称 G 为树。容易验证，树是边数最少的连通图。对于图 1.15 所示的图 G，有 $k(G)=6$。

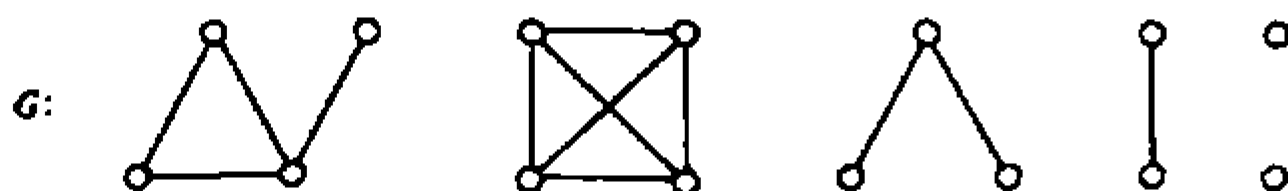


图 1.15 图和它的六个分支

对于一个连通图G,我们定义两个顶点u,v之间的距离$d_G(u,v)$为G中最短u—v路的长度。在不产生混淆的情况下,可简记为$d(u,v)$。在距离函数$d(u,v)$下,集$V(G)$是一个度量空间。为了使用方便,可以将距离函数$d(u,v)$推广到一般的图G上去:如果u和v属于同一个连通分支H,则$d_G(u,v)=d_H(u,v)$;如果u和v属于不同的连通分支,则$d_G(u,v)=\infty$。

设G为连通图,v是G的一个顶点。顶点v的离心率$e(v)=\max_{u\in V(G)}d(u,v)$,图$G$的半径$\mathrm{rad}(G)=\min_{v\in V(G)}e(v)$,而直径$\mathrm{diam}(G)=\max_{v\in V(G)}e(v)$。由直径的定义可知$\mathrm{diam}(G)=\max_{u,v\in V(G)}d(u,v)$。如果$e(v)=\mathrm{rad}(G)$,那么顶点$v$称为$G$的中心顶点。$G$的中心$Z(G)$是由它的所有中心顶点组成的顶点子集。

在图 1.16 所示的图G中,$\mathrm{rad}(G)=3$,$\mathrm{diam}(G)=5$,中心$Z(G)=\{u,v,w\}$,且在顶点x和y处取得最大离心率 5。

图的半径和直径具有下面不等式。

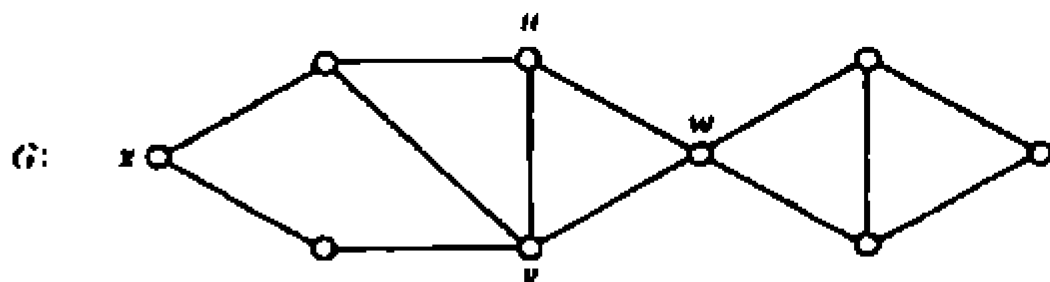


图 1.16 具有半径 3,直径 5 的图

定理 1.4 对于任意一个连通图G,

$$\mathrm{rad}(G)\leq \mathrm{diam}(G)\leq 2\mathrm{rad}(G)。$$

证明 不等式$\mathrm{rad}(G)\leq\mathrm{diam}(G)$是定义的直接结果。为了证明第二个不等式,选择$G$中顶点$u$和$v$使得$d(u,v)=\mathrm{diam}(G)$。设$w$是$G$的一个中心顶点。由函数$d(u,v)$是$V(G)$上的度量可得

$$\mathrm{diam}(G)=d(u,v)\leq d(u,w)+d(w,v)\leq 2\mathrm{rad}(G)。$$

定理的结论成立。■

现在我们给出二部图的一个有用特征。

定理 1.5 一个非平凡图是二部图当且仅当它不包含奇圈。

证明 假设$C=v_1v_2\cdots v_lv_1$是G的任意一个圈。不失一般性,可以假设v_1

$\in V_1$。由 $v_2 \in V_2, v_3 \in V_1, v_4 \in V_2, \cdots$ 可得，$v_k \in V_2$，且 $k = 2s$ 为偶数，所以 C 的长为偶数。由 C 的任意性可得，G 不包含奇圈。

因为一个非平凡图是二部图当且仅当它的每个非平凡分支是二部图，从而只须证明没有奇圈的非平凡连通图 G 是二部图即可。设 $v \in V(G)$。令 $V_1 = \{u \mid d(u,v) = 2l, l = 1,2,\cdots\}$，$V_2 = V(G) - V_1$。为了证明 G 是二部图，现在证明 $V(G)$ 的分划 V_1, V_2 是 G 的两个部分集。

假设 u 和 w 是 V_2 的元素，且 $uw \in E(G)$。显然，u 和 w 都不同于顶点 v。设 G 的一条最短的 $v—u$ 路和 $v—w$ 路分别为 $u_1u_2\cdots u_{2n+1}$ $(n \geq 1)$ 和 $w_1w_2\cdots w_{2m+1}$ $(m \geq 1, v = u_1 = w_1, u = u_{2n+1}, w = w_{2m+1})$。选取顶点 w' 为两条路的公共顶点使得在 $w'—u$ 子路和 $w'—w$ 子路上，w' 为唯一公共点(注意 w' 可能是 v)。由于这二条 $v—w'$ 子路所确定的都是最短的 $v—w'$ 路，因此有相同长度，即存在自然数 i 使 $w' = u_i = w_i$。显然，$u_iu_{i-1}\cdots u_{2n+1}w_{2m+1}w_{2m}\cdots w_i$ 是 G 的一个奇圈，这与假设矛盾，类似可证明 V_1 中也没有两个顶点是邻接的。■

练习

1. 设 u 和 v 是连通图 G 的任意两个顶点。证明：存在一条包含 G 的全部顶点的 $u—v$ 途径。

2. 证明："连通"是图 G 顶点集 $V(G)$ 上的等价关系。

3. (a) 设 G 是一个 p 阶图。证明：若对任意 $v \in V(G)$，$\deg(v) \geq (p-1)/2$，则 G 是连通图。

(b) 检查(a)中结果的可达性。

4. (a) 设 G 是一个 (p,q) 图。确定一个明显的界 $f(p)$，使得如果 $q > f(p)$，那么 G 是连通的。

(b) 证明：如果 G 是一个 (p,q) 图且 $q < p-1$，那么 G 是不连通的。

5. 证明：如果 G 是一个 $(p, p^2/4)$ 图，那么 G 包含一个奇圈或者 $G \cong K_{p/2,p/2}$。

6. 设 n 和 m 是正整数，且 $n \leq m \leq 2n$。证明：存在一个图 G 满足 $\mathrm{rad}(G) = n$ 和 $\mathrm{diam}(G) = m$。

7. (a) 证明：G 的每一个回路包含 G 的一个圈。

(b) 证明：如果一个顶点在 G 的一条迹中重复出现，那么这条迹包含 G 的一个圈。

8. 有一只容积为 8 加仑的酒壶盛满了酒，还有两只容积分别为 5 和 3 加仑的空壶。问平分酒的最简单方法应当怎样？

9. 设 $2n$ $(n \geq 2)$ 个人在一起聚会，每个人至少同其中 n 个人认识。证明：从

这 $2n$ 个人中总可以找出四个人来，这四个人可以围着一个圆桌坐下，使得每个人两旁也都是他认识的人。

10. 证明：一个图 G 是连通的当且仅当对于 $V(G)$ 的任何划分 V_1, V_2（其中：$V_1 \neq \varnothing, V_2 \neq \varnothing$，且 $V(G) = V_1 \cup V_2$，存在一条连接 V_1 中顶点和 V_2 中顶点的边。

11. 证明：如果 G 是不连通图，那么 $\overline{G}$ 是连通的。

12. 证明：

(a) 若 G 的最小度 $\delta(G) \geq 2$，则 G 中存在一条长度至少是 $\delta(G)+1$ 的圈。

(b) 若 $q \geq p$，则 G 存在一个圈。

1.3 最短路问题和选址问题

我们能很自然地推广上节中给出的图中两个顶点之间的距离概念。设 G 为一个图，如果 w 为 $E(G)$ 到 R^+ 的一个映射，则对任意 $e \in E(G)$，$w(e)$ 称为边 e 的权，而图 G 称为赋权图。在赋权图中，一条路 P 的长度定义为 P 中所有边的权之和。对于图 G 中连通的两个顶点 u 和 v 之间的距离 $d_G(u,v)$ 定义为 G 中所有 u—v 路长度的最小值。如果图 G 中每条边的权为 1，那么在 G 中，路的长度和距离定义就与第 1.2 节给出的定义完全一致，即 G 就是通常的图。

下面我们介绍一个好的算法。这个由 Dijkstra 给出的算法确定了在一个连通赋权图 G 中定点 u_0 到任何一个顶点 v 的距离 $d(u_0,v)$ 以及 G 中一条最短 u_0—v 路。这个算法将提供在第 1.1 节中所描述的民航问题的解决办法。令每条边的权对应两个城市之间直通航班的票价。在由此产生的赋权图中，求两个顶点之间的距离就相应于求从一个城市到另一个城市的最低票价。一条最短路就是两个城市之间具有最低票价的飞行路线。

在叙述 Dijkstra 算法以前，我们给出有助于说明这个算法的一些基本事实。设 u_0 是一个连通赋权图 G 的给定顶点，S 为 $V(G)$ 的一个包含 u_0 的子集且 $\overline{S} = V(G) - S$，u_0 到 $\overline{S}$ 的距离定义为

$$d(u_0,\overline{S}) = \min_{x \in \overline{S}} (u_0, x)。$$

显然，至少存在一个顶点 $v \in \overline{S}$ 使得 $d(u_0,\overline{S}) = d(u_0,v)$。设 $P = u_0u_1u_2\cdots u_nv$ 是 G 中一条最短 u_0—v 路，那么

(a) 对任意 $1 \leq i \leq n$，$u_i \in S$ 且

(b) $u_0u_1u_2\cdots u_n$ 是一条最短 u_0—u_n 路。

$$d(u_0,\overline{S}) = \min_{u \in S, v \in \overline{S}} \{d(u_0,u) + w(uv)\},$$

如果这个最小值在 $u=x$ 和 $v=y$ 达到，那么

$$d(u_0,y)=d(u_0,x)+w(xy)。$$

这里给出了 u_0 和 y 之间距离的表示法。

算法由 $S_0=\{u_0\}$ 开始，然后计算

$$d(u_0,\bar{S}_0)=\min_{u\in S_0,v\in \bar{S}_0}\{d(u_0,u)+w(uv)\},$$

如果这个最小值在 $v=u_1$ 出现，那么我们就得到 $d(u_0,u_1)$。然后我们定义 $S_1=\{u_0,u_1\}$，且继续上述过程，直到 $\bar{S}_{p-1}=\varnothing$，这里 p 为 G 的阶。

在整个计算过程中，对 G 的顶点 v 给定一系列标号 $(l(v),u_v)$。在算法结束时，对任意 $v\in V(G)$，$l(v)=d(u_0,v)$，而 u_v 是一条最短 u_0—v 路上 v 的前面一个顶点。在算法开始时，令 u_0 的标号为 $(0,u_0)$，对任意 $v\neq u_0$，v 的标号为 (∞,v)。当算法已经得到了 $S_i=S_{i-1}\cup\{u_i\}$ 时，对任意 $v\in\bar{S}_i$，用 $\min\{l(v),l(u_i)+w(u_iv)\}$ 代替原来的 $l(v)$，如果在这一过程中，$l(v)$ 的值发生了变化，则修改 v 的标号为 $(l(v),u_i)$。事实上在算法的计算过程中，$l(v)$ 永远表示当时已知的最短 u_0—v 路 P_v 的长，而第二个标号记录了路 P_v 中 v 前面的顶点。

算法 1A(Dijkstra) 给定阶为 p 的一个赋权连通图 G 和 G 的一个顶点 u_0：

第一步　设 $i=0$，$S_0=\{u_0\}$，$l(u_0)=0$ 且 $l(v)=\infty(v\neq u_0)$。如果 $p=1$，那么停止，否则，转入第二步。

第二步　对每一个 $v\in\bar{S}_i$，用 $\min\{l(v),l(u_i)+w(u_iv)\}$ 代替 $l(v)$。如果由此产生了 $l(v)$ 的一个新值，那么用有序对 $(l(v),u_i)$ 标号顶点 v。

第三步　确定 $\min_{v\in\bar{S}_i}l(v)$，并求出达到最小值的顶点 u_{i+1}。

第四步　置 $S_{i+1}=S_i\cup\{u_{i+1}\}$。

第五步　用 $i+1$ 代替 i。如 $i=p-1$，则停止，否则转第二步。

算法 1A 确定了一个阶为 p 的赋权连通图 G 的一个定点 u_0 到 G 的每个顶点的距离的计算方法，即在这个算法结束后，对任意 $v\in V(G)$，$l(v)=d(u_0,v)$。当 $v\neq u_0$ 时，存在一条最短 u_0—v 路 $w_0w_1w_2\cdots w_k$(其中：$u_0=w_0$，$w_k=v$)满足 w_i 的标号为 $(l(w_i),w_{i-1})(1\leq i\leq k)$。算法 1A 是一个好算法，所谓一个图论算法是好算法(也叫有效算法)，如果它的算法次数上界由图的顶点数 p 和边数 q 的一个多项式函数给出。如果这个上界由 p 和 q 的指数函数或阶乘形式给出，那么称为坏算法或无效算法，到目前为止，图论中的许多问题尚未找到好算法。算法有效性的研究是图论和计算机科学的重要课题之一。

接下来，我们考虑图 1.17 所示赋权图 G，对任意 $v\in V(G)$，计算 $d(u_0,v)$，并确定一条最短 u_0—v_1 路。

第一步　置 $i=0$，$S_0=\{u_0\}$，$l(u_0)=0$，且对任意 $v\neq u_0$，令 $l(v)=\infty$，

$u_v = v$。

第二步　置 $l(v_2) = 13$，用 $(l(v_2), u_0)$ 标号 v_2。

置 $l(v_4) = 16$，用 $(l(v_4), u_0)$ 标号 v_4。

置 $l(v_5) = 8$，用 $(l(v_5), u_0)$ 标号 v_5。

第三步　在 $\bar{S}_0$ 的顶点中，标号最小的是 8，且在 v_5 出现。

第四步　设 $S_1 = \{u_0, v_5\}$。

第五步　置 $i = 1$。因为 $i < 5$，转到第二步。

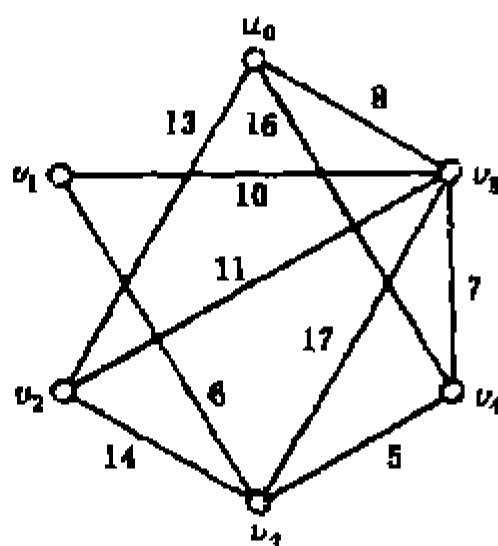


图 1-17　一个赋权图

第二步　置 $l(v_1) = 18$，用 $(l(v_1), v_5)$ 标号 v_1。
　　　　置 $l(v_3) = 25$，用 $(l(v_3), v_5)$ 标号 v_3。
　　　　置 $l(v_4) = 15$，用 $(l(v_4), v_5)$ 标号 v_4。

第三步　在 $\bar{S}_1$ 顶点中，最小标号是 13，在 v_2 达到。

第四步　设 $S_2 = \{u_0, v_2, v_5\}$。

第五步　置 $i = 2$。因为 $i < 5$，转到第二步。

第二步　标号没有改变。

第三步　在 $\bar{S}_2$ 的顶点中，最小标号是 15，且在 v_4 出现。

第四步　设 $S_3 = \{u_0, v_2, v_4, v_5\}$。

第五步　置 $i = 3$。因为 $i < 5$，转第二步。

第二步　置 $l(v_3) = 20$，用 $(l(v_3), v_4)$ 标号 v_3。

第三步　在 $\bar{S}_3$ 的顶点中，标号最小的是 18，且在 v_1 出现。

第四步　设 $S_4 = \{u_0, v_1, v_2, v_4, v_5\}$。

第五步　置 $i = 4$。因为 $i < 5$，转到第二步。

第二步　标号没有改变。

第三步　在 $\bar{S}_4$ 的顶点中，最小标号是 20，且在 v_3 中出现。

第四步　设 $S_5 = \{u_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$。

第五步　置 $i = 5$。因为 $i = 5$，算法停止。

因此我们已经计算出了下面的距离：

$d(u_0,u_0)=l(u_0)=0$，$d(u_0,v_3)=l(v_3)=20$，$d(u_0,v_1)=l(v_1)=18$，

$d(u_0,u_4)=l(v_4)=15$，$d(u_0,v_2)=l(v_2)=13$，$d(u_0,v_5)=l(v_5)=8$，

为了确定一条最短 u_0-v_3 路。我们注意到 v_3 的第二标号是 v_4，v_4 的第二标号是 v_5，而 v_5 的第二标号是 u_0，所以这条路是 $u_0v_5v_4v_3$。

Dijkstra 算法的框图由图 1.16 给出。

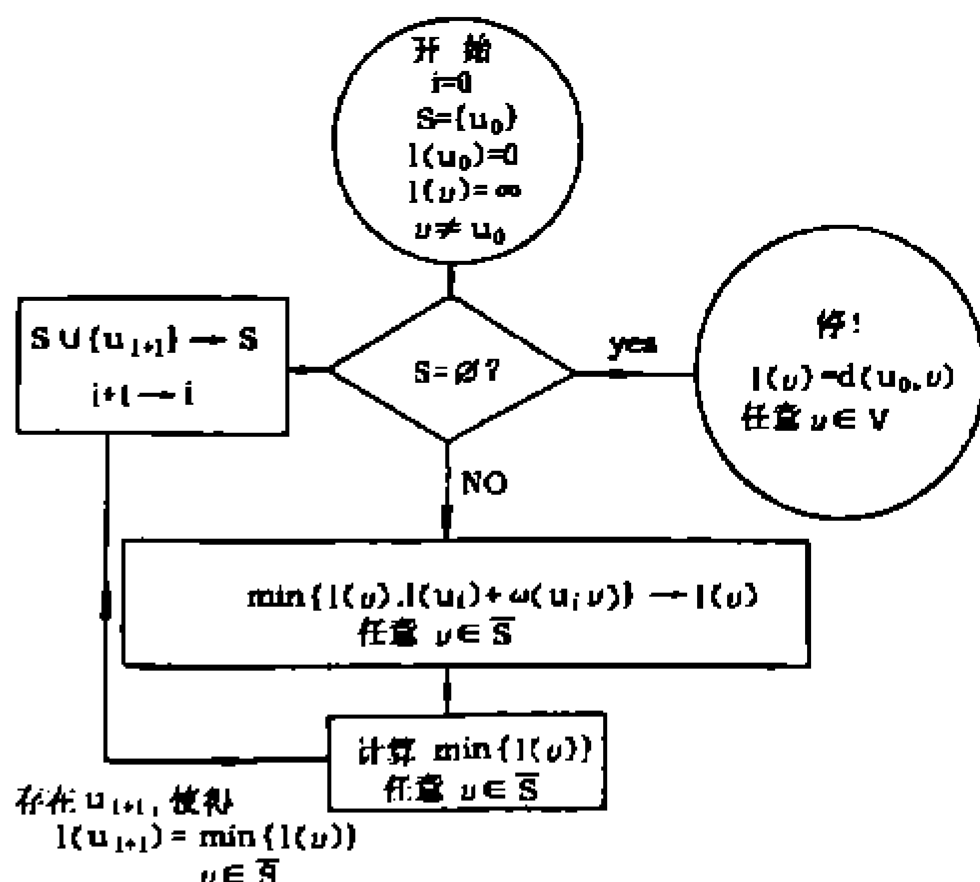


图 1.18 Dijkstra 算法

Dijkstra 算法是一个好算法。注意到框图中框 2 和框 3 的计算量，全部叠代过程总共需要作 $p(p-1)/2$ 次加法和 $p(p-1)$ 次比较。决定一个顶点属于或者不属于 $\bar{S}$(框1) 的问题，在框图中没有阐述。Dreyfus(1969) 报告了一个解决该问题的方法。它总共需要 $(p-1)^2$ 次比较，若把一次比较或一次加法作为基本计算单位，则这个算法的计算总量约为 $5p^2/2$，它是 p^2 数量级的（称一个函数 $f(p,q)$ 是 $g(p,q)$ 数量级的，如果存在一个常数 $c>0$，使得对所有 p 和 q，都有 $f(p,q)/g(p,q)\le c$）。

选址问题也是一个应用很广泛的图论问题。例如居民区商店设在什么位置服务效果最好；公用电话设在哪里大家使用最方便；消防队设在何处，才能最快地到达灭火地点；矿区的选矿场设在何处，才能使各采矿点运送矿石的总运费最少等等。

设G是一个连通图，在它的各个顶点上有一些服务对象。现在要设置一些服务点，问设在哪些顶点最好？

首先应当明确所谓"好"与"坏"的标准是什么？例如设立消防站时，一般应考虑它到最远的那个灭火点的距离尽可能短，而设立选矿厂时，方案的优劣首先要看总运费的多少。正因为如此，解决不同的问题，方法也就有所不同。

第一种，使最大服务距离达到最小。

离心率的概念在赋权图G中也能得到很自然的推广，赋权图G中顶点v的离心率

$$e(v) = \max_{u \in V(G)} \{d(v,u)\}$$

并把它称为顶点v的最大服务距离。使最大服务距离达到最小的点就是离心率等于G的半径的点，即为第1.2节所说的图G的中心顶点。

因此，在赋权图G中只要把服务点设在G的中心，就能使它达到最远服务对象的距离为最小。求图的中心步骤可分为：

第一步　用求最短路的方法，作一个$p \times p$矩阵，其中(i,j)位置的元素为$d(v_i,v_j)$。

第二步　在这个矩阵中确定每一行（或每一列）最大元$e(v_i)$。

第三步　比较所有$e(v_i)$，其中最小者若在矩阵中的第k行（或第k列），则v_k即为中心顶点。

不难知道，求G的中心的上述算法也是好算法。

第二种，t-中心问题。

前一个问题是要求出图G的一个顶点v（但这样的顶点可能不止一个），使它到其它顶点的最大服务距离为最小。如果要设t个服务站，那么设置在何处最好呢？这就是所谓t-中心问题。

首先看2-中心问题。

图1.19所示的图G的距离矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 6.3 & 9.3 & 4.5 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 3.3 & 6.3 & 1.5 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 2 & 5 & 2.5 & 4 \\ 6.3 & 3.3 & 2 & 0 & 3 & 1.8 & 3.3 \\ 9.3 & 6.3 & 5 & 3 & 0 & 4.8 & 6.3 \\ 4.5 & 1.5 & 2.5 & 1.8 & 4.8 & 0 & 1.5 \\ 6 & 3 & 4 & 3.3 & 6.3 & 1.5 & 0 \end{bmatrix}$$

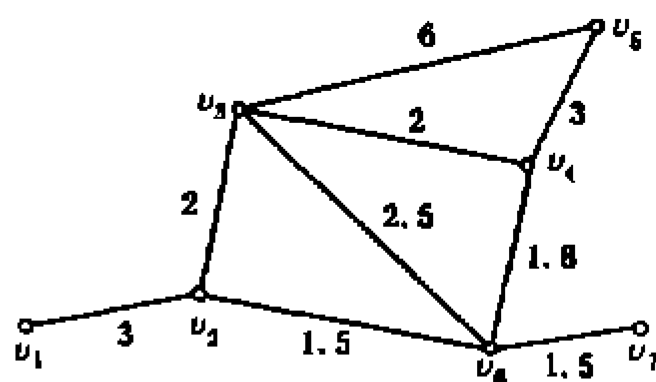


图1.19　赋权图G

如果把服务点设在v_2和v_5处，则这

两点到 v_1 的距离分别为 3 和 9.3，因此以 v_2 对 v_1 服务为宜，这时 v_1 到较近的服务站的距离（称为 v_1 的服务距离）为 3；对 v_4 来说，两个服务点到它的距离分别为 3.3 和 3，当然以 v_6 对 v_4 服务为宜，v_5 对 v_4 服务距离为 3。照此办理，可求出 v_2,v_5 到各顶点的服务距离。我们取距离矩阵中第 2 行和第 5 行进行比较，这二行中同列最小者就是 v_2,v_5 到各顶点的服务距离，我们把它表示为向量的形式：

$$(3,0,2,3,0,1.5,3)$$

其中最大数为 3，称为顶点对 (v_2,v_5) 的最大服务距离，记为 $e(v_2,v_5)=3$。(v_1,v_4) 到各顶点的服务距离为向量：

$$(0,3,2,0,3,1.8,3.3)$$

故 $e(v_1,v_4)=3.3$。由此可见，服务点设在 v_2,v_5 处比设在 v_1,v_4 处为好。

一般地，如果把两个服务点设在 v_i 和 v_j 处，它们到顶点 $v_k(k=1,2,\cdots,p)$ 的距离分别为 $d(v_i,v_k)$ 和 $d(v_j,v_k)$。令

$$e(v_i,v_j)=\max_{1\le k\le p}\{\min\{d(v_i,v_k),d(v_j,v_k)\}\},$$

把 $e(v_i,v_j)$ 称为顶点对 (v_i,v_j) 的离心率，事实上，它就是顶点对的最大服务距离。使 $e(v_i,v_j)$ 达到最小的顶点对，叫做图 G 的 2-中心。我们知道 p 阶图有 $p(p-1)/2$ 个顶点对，只需把每个顶点对相应的最大服务距离加以比较，就可求出 G 的 2-中心。求 2-中心的上述算法也是好算法。将 2-中心的概念加以推广，即可考虑 3-中心，4-中心，…，t-中心的问题，可以想象 t-中心具有很广泛的应用。如果仍采用与求 2-中心类似的方法来求 t-中心，那么计算次数就是顶点个数 p 以及 t 的指数函数，因此它不是有效算法。迄今为止，寻求 t-中心算法仍是一个尚未解决的问题。

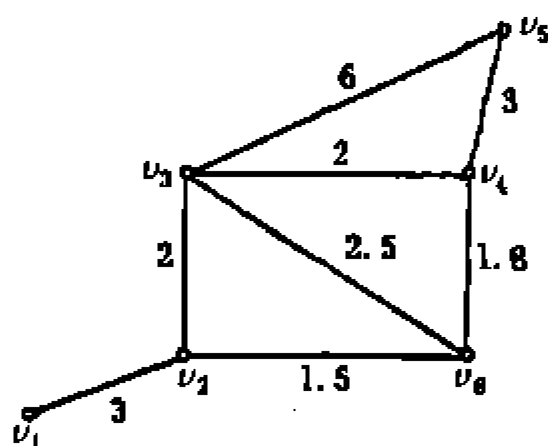


图 1.20

第三种使总运输费达到最小。

把赋权图 G 看成一个矿区（图 1.20）。

在 $V(G)$ 上定义的函数 w 表示各采矿点的矿石日产量，其中：

$$w(v_1)=3,w(v_2)=5,w(v_3)=7,$$
$$w(v_4)=2,w(v_5)=5,w(v_6)=4。$$

$E(G)$ 上定义的函数 $t(v_i,v_j)$ 表示相应的顶点之间的距离。如果要在此矿区修建一个选矿厂，问应把厂址选在何处，才能使各矿点开采的矿石运到选矿厂花

费的总运输费最小?

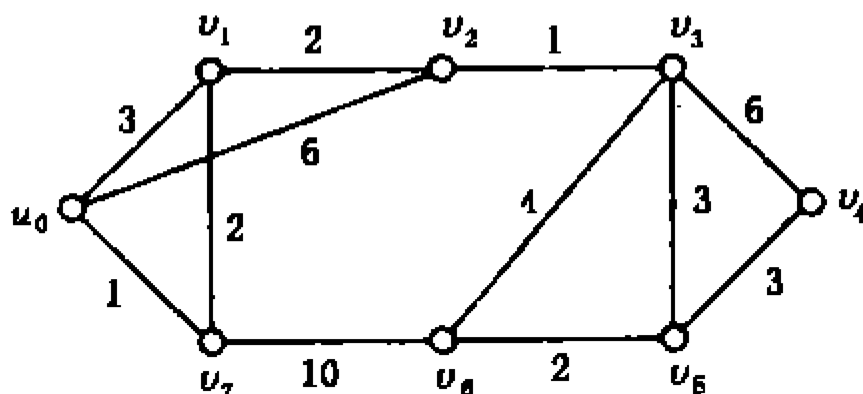
如果把选矿厂设在 v_i 处,那么对采矿点 v_j 来说,如日开采量为 $\omega(v_j)$,到 v_i 的距离为 $t(v_i,v_j)$,于是把 v_j 所产矿石全部运到选矿厂每日运费为 $t(v_i,v_j)\omega(v_j)$(单位重量单位距离的运费为 1 个单位)。全矿区每日总运费为:

$$g(v_i) = \sum_{j=1}^{p} t(v_i,v_j)\omega(v_j)。$$

使 $g(v_i)$ 达到最小的顶点 v_i 称为赋权图 G 的中央点。显然,以总运费的大小为标准时,中央点就是设置选矿厂的最佳位置。

练习

1. (a) 设 G 是一个如下图所示的赋权图。运用 Dijkstra 算法对于任意 $v \in V(G)$,计算 $d(u_0,v)$,并确定一条最短 $u_0 - v_6$ 路。



(b) 设 H 是由(a)中赋权图去掉边上的权得到的图。运用 Dijkstra 算法,计算对于任意 $v \in V(H)$,计算 $d_H(u_0,v)$,并确定一条最短 u_0—v_6 路。

2. 某公司在六个城市,$C_1,C_2,\cdots,C_6$ 中都有分公司,从 C_i 到 C_j 的直接航程票价由下述矩阵的(i,j) 元素给出(∞ 表示两个城市之间无直接航班):

$$\begin{bmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{bmatrix}$$

该公司想算出一张任意两个城市之间最廉价路线表,试作出这样的表来。

3. 求图 1.20 所示的图 G 的中心和中央点。

2 图的连通性

在第 1.2 节，引进了连通图的概念，连通性是图的最基本的性质之一。在这一章，将对图的“连通性”作出更详细和更准确的描述。

2.1 割点、桥和块

就一般连通图而言，“连通”只是它的一个基本特性，有些图虽然是连通的，但只要去掉一个顶点或一条边就变成不连通的；有一些图，需要删去它的许多顶点或边才能破坏它的连通性。这种现象，特别在研究各种网络结构（计算机网络、通信网络和交通网络）时，网络的可靠性与网络所对应图的连通性有密切的关系。因此，有必要对图的连通性进行系统研究。

如果图 G 的顶点 v 满足 $k(G-v)>k(G)$，那么顶点 v 称为图 G 的割点。对于一般连通图而言，如果从图中去掉一个顶点就得到一个不连通的图，则该顶点就是图的割点；而对于一般图而言，一个顶点是图 G 的割点当且仅当删去它可使 G 的分支数增加。

下面的定理刻画了割点的特征。

定理 2.1 连通图 G 的一个顶点 v 是 G 的一个割点当且仅当存在顶点 u 和 $w(u,w\neq v)$ 使得：v 位于 G 的每一条 u—w 路上。

证明 设顶点 v 是 G 的一个割点，则 $G-v$ 是不连通的。如果 u 和 w 是 $G-v$ 不同分支的顶点，那么在 $G-v$ 中就不存在 u—w 路。因为 G 是连通的，所以存在 G 中 u—w 路，且 v 位于 G 的每一条 u—w 路上。

反过来，如果存在 $u,w\in V(G)\setminus\{v\}$ 满足 v 位于 G 的任意一条 u—w 路上，那么在 $G-v$ 中就不存在 u—w 路。从而 $G-v$ 是不连通的，即 v 是 G 的割点。 ■

完全图是没有割点的，而只有两个顶点的路也不包含割点。下面的定理对这个极端情况进行了刻画。

定理 2.2 任意一个非平凡图 G 至少包含两个不是割点的顶点。

证明 假设定理不成立。那么存在一个非平凡连通图 G 满足：G 的任意两

个顶点中至少有一个是割点。设 u 和 v 是 G 的两个顶点满足 $d(u,v)=\mathrm{diam}(G)$。u 和 v 中至少有一个是割点，不妨设 v 是割点。设 $w\in V(G-v)$ 且 w 和 u 属于 $G-v$ 的不同分支。由 G 的每一条 $u-w$ 路都要包含 v 可得 $d(u,w)>d(u,v)=\mathrm{diam}(G)$。与图直径的定义矛盾。■

对于边而言，类似于割点的概念为桥。如果图 G 的一条边 e 满足：$k(G-e)>k(G)$，则称 e 是图 G 的桥。由桥的定义可知，如果 e 是 G 的桥，那么 $k(G-e)=k(G)+1$ 且 e 的两个端点分别属于 $G-e$ 的不同分支；如果 $e=uv$，那么 u 是 G 的一个割点当且仅当 $\deg(u)>1$。实际上完全图 K_2 是唯一的一个有桥而没有割点的连通图。可以用类似于割点的方式来刻画桥的特征，下面定理的证明也类似于定理 2.1。

定理 2.3 连通图 G 的一条边是桥的充分必要条件是存在顶点 u 和 w 使得：G 的每一条 $u—w$ 路包含边 e。

关于桥，有另外一个有用的特征。

定理 2.4 图 G 的一条边 e 是桥当且仅当 G 的任意一个圈不包含边 e。

证明 假设 G 是连通的，$e=uv$ 是 G 的桥，G 的一个圈 C 包含 e，且 w_1 和 w_2 是 $G-e$ 的不同分支的顶点。任取 G 的一条 $w_1—w_2$ 路 P，则 $e\in E(P)$。用 C 上不包含 e 的 $u—v$ 路（或 $v—u$ 路）代替 e 产生一条 $w_1—w_2$ 途径 P'，且 $e\notin E(P')$，从而 $G-e$ 中存在一条 $w_1—w_2$ 路。与 w_1 和 w_2 属于 $G-v$ 的不同分支矛盾，即 G 的任意一个圈不包含边 e。

反过来，假设 $e=uv$ 是 G 的一条边，G 的任意一个圈不包含边 e，且 e 不是桥。由 $G-e$ 是连通的可得，$G-e$ 中存在一条 $u—v$ 路 P，即 $P+e$ 为 G 中包含 e 的一个圈。矛盾。■

属于圈上的一条边称为圈边。由定理 2.4，图 G 的一条圈边一定不是 G 的桥。图 G 中与一个悬挂点关联的边称为悬挂边。显然，悬挂边一定为桥。

事实上，确实存在许多不含割点的图。不含割点的图称为不可分图，否则称为可分图。非平凡的不可分图称为块。如果 G 的子图 H 满足 H 是一个块，而且对 G 的任意一个子图 F，由 $H\subset F$ 可得 F 是可分图，则称 H 为 G 的一个块。由块的定义可知：图的块必然是导出子图；图的所有不同块导出边集的一个划分；任意两个不同块最多只有一个公共点，且存在公共顶点时，该顶点必为图的割点。图 2.1 中的图有五个块 $B_i(1\le i\le 5)$。正象所指出的那样，顶点 v_2，v_5 和 v_6 是割点，而 v_3v_5 和 v_4v_5 是桥，不过 v_4v_5 也是悬挂边。

下面给出图是块的两个判定法。

定理 2.5 一个 $p(p\ge 3)$ 阶图 G 是块当且仅当对于 G 的任意两个顶点，G 中存在包含这两个顶点的圈。

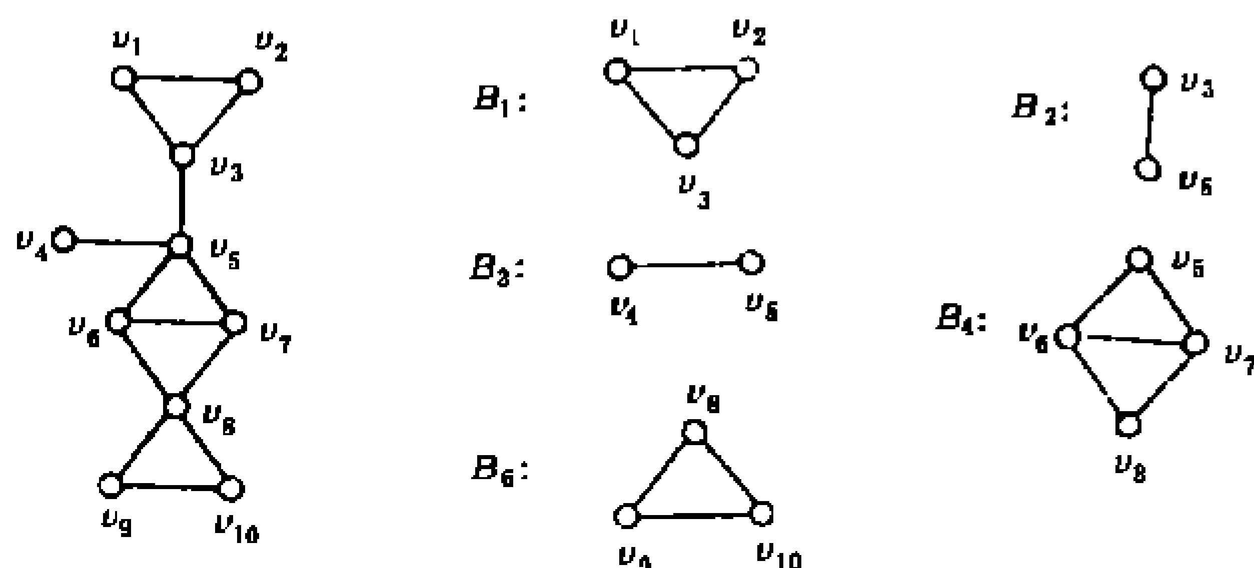


图 2.1 一个图和它的五个块

证明 假设G是一个图，对于它的任意两个顶点，G中存在包含这两个顶点的圈，且G不是块。显然G是连通的，且G包含一个割点v。由定理2.1，存在顶点u和w满足：v落在G的每一条$u—w$路上。设C是包含u和w的一个圈。C确定了两条不同的$u—w$路，这两条路中至少有一条不包含v，这与每一条$u—w$路包含v的事实矛盾，因此G是块。

反过来，设G是一个阶$p\geq 3$的块，且G中存在两个顶点不位于同一个圈上。选取G的两个顶点u和v满足：两个顶点不位于同一个圈上，且$d(u,v)=\min\{d(x,y)\mid x$和$y$不位于同一个圈上$\}$。因为$G$是一个块，它不包含割点。又因为$P\geq 3$，所以$G$没有桥。由定理2.4，$G$的每条边落在$G$的一个圈上，所以$d(u,v)=n>1$。因为$G$是连通的，故在$G$中存在一条最短$u—v$路$W$。设$x$为$W$上$v$前面的第一个顶点，由$d(u,x)=d(u,v)-1>0$可得，$u\neq x$且存在圈$C$包含顶点$u$和$x$。由于$x$不是$G$的割点，故$G-x$中存在一条$u—v$路$P=v_0v_1v_2v_3\cdots v_m(u=v_0,v=v_m)$不包含$x$。设$j$是最大整数$(0\leq j<m)$满足：$v_j$同时属于$P$和$C$，则$P$的子路$P'=v_jv_{j+1}\cdots v_m$与$C$有唯一的公共顶点$v_j$。可构造包含$u$和$v$的一个圈如下：从$u$出发，沿$C$中不包含$v_j$的一段由$u$到达$x$(如果$j=0$，则任选一条$C$中的$u—x$路)；经过边$xv$到达$v$；再通过子路$P'$由$v$到达$v_j$；最后，沿$C$中不包含$x$的一段由$v_j$到达$u$。从而与$u$和$v$不位于同一个圈上矛盾。■

一条$u—v$路P的内部顶点是不同于u,v的任何P的顶点。路的集合$\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$称为内不交的，如果对于任意$1\leq i<j\leq n$，P_i的任意一个内部顶点都不是P_j的内部顶点。显然，两条$u—v$路是内不交的，如果除了u和v外，这两条路没有其它公共顶点。边不交$u—v$路是没有公共边的路。现在我们给出块的第二个特点。

推论 2.5 阶 $p(p\geq 3)$ 的图 G 是块当且仅当对于 G 中任意两个不同顶点 u 和 v 存在两条内不交的 $u—v$ 路。

定理 2.5 的结论也给出了块的一个分类方式，即有圈块和无圈块。阶 $p(p\geq 3)$ 的任意一个块均满足任意两个顶点位于同一个圈，称为圈块，块 K_2 是唯一一个不包含圈的块，称为无圈块。

对于不是块的连通图，可以得到下面的定理。

定理 2.6 如果 G 是一个非平凡连通图且不是块，那么在 G 的块中，至少存在两个块满足每个块恰好只含 G 的一个割点。

实际上，定理 2.2 是定理 2.6 的推论。根据定理 2.6 的观点，可定义图 G 的一个悬挂块是恰好只含 G 的一个割点的块。定理 2.6 可以重述为：任意一个有割点的连通图，至少包含两个悬挂块。下面给出另一个经常用到的结果。这个证明留给读者。

定理 2.7 设 G 是一个非平凡的可分连通图，那么 G 包含一个割点 v 满足最多除一个块外，包含 v 的全部块是悬挂块。

存在图的块的另一个有趣的性质。

定理 2.8 如果图 G 是一个连通图，那么存在 G 的一个块 B 使得：图 G 的中心 $Z(G)\subseteq V(B)$。

证明 假设 G 是一个连通图，且对于 G 的任意一个块 B 满足：$Z(G)\not\subseteq V(B)$。由此可得 G 存在一个割点 v 使 $G-v$ 包含分支 G_1 和 G_2，且 G_1 和 G_2 均包含 $Z(G)$ 中元素。设 u 是一个满足 $d(u,v)=e(v)$ 的顶点，P_1 是一条长为 $e(v)$ 的 $v—u$ 路。G_1 和 G_2 中至少有一个不含 P_1 的点，不妨设 G_2 不含 P_1 的点。任意选取 $w\in V(G_2)\cap Z(G)$ 及一条最短 $w—v$ 路 P_2。路 P_1 和 P_2 一起形成一条 $u—w$ 路 P_3，这必是一条长为 $d(u,w)$ 的 $u—w$ 路，从而 $e(w)>e(v)$，与 $w\in Z(G)$ 矛盾。■

如果图 G 是一个块且对每一个顶点 $v\in V(G)$，图 $G-v$ 不是块，则称 G 为临界块，否则，称为非临界块。由临界块的定义可知：一个块 G 是非临界的当且仅当存在 G 的一个顶点 v 满足：$G-v$ 也是块。对于边而言，有一个与临界块类似的概念，如果图 G 是一个块，且对任意一条边 $e\in E(G)$，图 $G-e$ 不是块，则称 G 为最小块。

图 2.2 中，块 G_1 是最小的且非临界的，而块 G_2 是临界的但非最小的。在图 2.2 中，每一个图都包含度为 2 的顶点。事实上，除个别的几个以外，所有最小块和临界块都具有这种性质，即几乎所有最小块和临界块都至少包含一个 2 度点。

定理 2.9 任意一个阶至少为 4 的临界块包含一个度为 2 的顶点。



图 最小块和临界块

证明 设G是一个阶至少为4的临界块。对G中每一个顶点x，在$G-x$中存在顶点y使$G-x-y$是不连通的。选取顶点对u和v满足$G-u-v$不连通，且包含一个阶n最小的分支G_1。设G_2是$G-u-v$其它分支的并。如果$n=1$，那么G_1的唯一顶点一定是G的一个2度顶点，定理结论成立。从而，可假设$n>2$。令$H=\langle V(G_1)\cup\{u,v\}\rangle$，那么$H$是连通的。设$w_1\in V(G_1)$，$w_2$是$G-w_1$的一个割点。下面分二种情况进行讨论。

情况1 假设$w_2\notin V(H)$。因为$\langle V(G_1)\cup\{u\}\rangle$和$\langle V(G_2)\cup\{v\}\rangle$是连通的，故$G-w_1-w_2$中存在一个分支包含$\langle V(G_1)\cup\{u\}\rangle(w_2\neq u)$或者$\langle V(G_1)\cup\{v\}\rangle(w_2\neq v)$，即$G-w_1-w_2$有一个阶比$n$小的分支，与$u$和$v$取法矛盾。

情况2 假设$w_2\in V(G_1)$。如果u和v属于$G-w_1-w_2$的同一个分支G'，则对于任意$x\in V(G_2)\setminus\{w_2\}$，存在$G$的圈$C$使得：$w_1,x\in V(C)$。由于$w_1$和$x$属于$G-u-v$的不同分支，所以$u,v\in V(C)$且$\langle V(G_2)\cup\{u,v\}\rangle$中存在内不交的$u-x$路和$v-x$路，从而$x\in V(G')$。同理，对于任意$x\in V(G_1)\setminus\{w_1,w_2\}$，$x\in V(G')$。由此可得，$G'=G-w_1-w_2$，与$G-w_1-w_2$不连通矛盾。所以$u$和$v$属于$G-w_1-w_2$的不同分支，即包含$u$的分支$H_u$和包含$v$的分支$H_v$。如果$H_u$或者$H_v$是平凡的，那么$G$有一个度为2的顶点(即$u$或$v$)，定理结论成立。假设$H_u$和$H_v$都是不平凡的。由$n>1$可得$V(G_1)\cap V(H_u)\neq\varnothing$或者$V(G_1)\cap V(H_v)\neq\varnothing$。不妨设$V(G_1)\cap V(H_u)\neq\varnothing$，那么存在$G-w_1-u$的一个分支$H'$是$G_1-w_1$的子图，所以$H'$的阶小于$n$。与$u$和$v$的取法矛盾。■

推论2.9 如果G是一个阶至少为4的最小块，那么G包含一个度为2的顶点。

证明 假设G是一个阶至少是4的最小块，但G不含度为2的顶点。由定理2.9，G不是临界块。G含有顶点w满足：$G-w$是一个块。设e是与w关联的一条边。因为G是最小块，所以$G-e$不是块，即$G-e$包含一个割点$u(u\neq w)$使得$G-e-u$是不连通的。由此可得，e是$G-u$的桥。另一方面，由$G-u-w$是连通的可得e是$G-u$的悬挂边且w是$G-u$的悬挂点，即w是$G-u$的1度顶点，是G的2度顶点。矛盾。■

练习

1. 证明定理 2.3。

2. 证明：每一个连通的$(p,p-1)$图$(p\geq 3)$包含一个割点。

3. 证明：每一个连通的(p,q)图$(3\leq p\leq q)$包含一条圈边。

4. 证明：只包含偶顶点的图是无桥的。

5. 证明：如果v是连通图G的一个割点，那么v不是$\overline{G}$的割点。

6. 证明推论 2.5。

7. 设G是一个阶$p(p\geq 3)$的块，u和v是G的不同顶点。如果P是G中一条已知u—v路，那么总存在一条与P内不交的u—v路Q吗？

8. 对于非平凡连通图G，定义G的块-割点图$bc(G)$满足：顶点是G的所有块和割点，且$bc(G)$中两个顶点是邻接的当且仅当一个是G的割点，而另一个是包含该割点的块。

(a) 证明：$bc(G)$是连通无圈的。

(b) 证明定理 2.6。

(c) 证明定理 2.7。

9. 由定理 2.6，证明定理 2.2。

10. 图G的一个元素是G的顶点或者边。证明：阶$p(p\geq 3)$的图G是块当且仅当G的每对元素位于G的同一个圈上。

11. 设G是一个圈块，且$v\in V(G)$。证明：存在G的一个顶点u满足：$uv\in E(G)$，且$G-u-v$是连通的。

12. 设G为一个圈块，v和u是G的任意两个顶点，且F是$G-v-u$的任意一个连通分支。证明：$\langle V(F)\cup\{u,v\}\rangle$是$G$的一个连通子图。

2.2 n-连通图和n-边连通图

在这一节中，我们要推广上一节引入的割点、桥和块的概念。

如果图G的顶点集的一个真子集U满足$G-U$不连通，则称U为G的顶点割。G的顶点割中，基数最小的称为最小顶点割。从完全图中删去任何一个顶点真子集只能产生另一个完全图，从而约定完全图K_p的所有顶点割的基数为$p-1$。图G的最小顶点割的基数称为图的点连通度或简称为连通度，记为$\kappa(G)$。显然，如果G不是完全图，则$\kappa(G)<p(G)-1$，而且$\kappa(K_p)=p-1$。由连通度的定义可知：$\kappa(G)$是破坏G的连通性或者产生一个平凡图需要从G中删去的最少顶点数；非平凡图G满足$\kappa(G)=0$当且仅当G是不连通的；图

G 满足 $\kappa(G)=1$ 当且仅当 $G\cong K_2$ 或 G 是一个可分连通图；图 G 满足 $\kappa(G)\geq 2$ 当且仅当 G 是一个阶不小于 3 的不可分连通图。

类似地可定义与边对应的连通度的概念。如果非平凡图 G 的一个边子集 X 满足：$G-X$ 是不连通的，则称 X 为 G 的一个边割。基数最小的边割称为图的最小边割。由边割的定义可得：如果 X 是一个非平凡连通图的最小边割，那么 $G-X$ 只能有两个分支；每一个非平凡图都存在边割。图 G 的最小边割的基数称为 G 的边连通度，记为 $\kappa'(G)$。约定平凡图的边连通度 $\kappa'(K_1)=0$。所以，$\kappa'(G)$ 是得到一个不连通或平凡图需要从 G 中删去的最少边数。

由边连通度的定义可得，$\kappa'(G)=0$ 当且仅当 G 是不连通的或平凡的；而 $\kappa'(G)=1$ 当且仅当 G 是连通的且有桥。一个图的连通度，边连通度和最小度 $\delta(G)$ 之间有下面的关系。

定理 2.10 对任何图 G，$\kappa(G)\leq\kappa'(G)\leq\delta(G)$。

证明 首先，证明不等式 $\kappa'(G)\leq\delta(G)$。设 $v\in V(G)$，且 $\deg(v)=\delta(G)$。如果 $\delta(G)=0$，则 v 为 G 的孤立顶点，且 $\kappa'(G)=0$，结论成立。假设 $\delta(G)>0$。从 G 中删去所有与 v 关联的 $\delta(G)$ 条边得到图 G'。显然 v 是 G' 的孤立顶点，且 G' 是不连通的，即 $\kappa'(G)\leq\delta(G)$。

其次，证明不等式 $\kappa(G)\leq\kappa'(G)$。如果 $\kappa'(G)=0$，那么 G 是不连通的或者平凡的，即 $\kappa(G)=0$；如果 $\kappa'(G)=1$，那么 G 是连通的，且包含一个桥，即 $G\cong K_2$ 或者 G 是连通的且包含割点，所以 $\kappa(G)=1$。总之，当 $\kappa'(G)<2$ 时，总有 $\kappa(G)=\kappa'(G)$，结论成立。假设 $\kappa'(G)\geq 2$。在 G 中存在基数为 $\kappa'(G)$ 的边子集 S 满足 $G-S$ 不连通。设 $e=uv\in S$，且 $G'=G-(S\backslash\{e\})$。显然 e 是 G' 的桥。对 $S\backslash\{e\}$ 的每一条边，选择一个不同于 u 和 v 的关联顶点构成 G 的一个顶点子集 V。设图 $H=G-V$。如果 H 是不连通的，则 $\kappa(G)<\kappa'(G)$，否则 H 是连通的，即 $H\cong K_2$ 或者 H 有一个割点。在任何情况下，存在 H 的一个顶点，删去这个顶点产生一个不连通图或平凡图。因此，$\kappa(G)\leq\kappa'(G)$。■

图 2.3 表示了一个图 G 满足：$\kappa(G)=2$，$\kappa'(G)=3$ 且 $\delta(G)=4$。

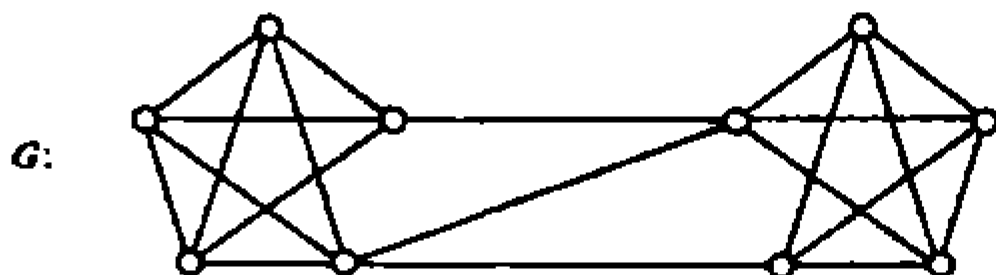


图 2.3 一个 $\kappa(G)=2$，$\kappa'(G)=3$ 和 $\delta(G)=4$ 的图

如果图 G 的连通度 $\kappa(G)\geq n(n\geq 1)$，则称图 G 是 n- 连通的或者 G 为 n-连通图。由上述定义可得：G 是 1- 连通的当且仅当 G 是不平凡的和连通的；G

是 2- 连通的当且仅当 G 是一个圈块。换句话说，当 $n \geq 2$ 时，图 G 是 n- 连通的当且仅当从 G 中删去任意 $n-1$ 个顶点产生一个非平凡连通图。

通常情况下，对某一个特殊的 n 了解一个图是否为 n- 连通的与了解连通性本身那样有价值。下面的定理给出了一个图是 n- 连通的条件。这里$\lceil x \rceil$表示不小于 x 的最小整数，$\lfloor x \rfloor$ 表示不大于 x 的最大整数。

定理 2.11 设 G 是一个 $p(p \geq 2)$ 阶图，n 是一个自然数($1 \leq n \leq p-1$)。如果对 G 的任意一个顶点 v

$$\deg(v) \geq \left\lceil \frac{p+n-2}{2} \right\rceil,$$

那么 G 是 n- 连通的。

证明 假设 G 满足定理的条件且不是 n- 连通的，即 $\kappa(G) < n$。如果 G 是完全图，结论显然成立。假设 G 不是完全图，即存在 G 的一个顶点子集 S 满足 $G-S$ 不连通且 $\kappa(G) \leq |S| = n-1$。设 H 是 $G-S$ 的一个阶最小的分支且 $|V(H)| = k$。由于 $G-S$ 至少有两个分支且 H 是阶最小的分支，所以

$$k \leq \left\lfloor \frac{p-n+1}{2} \right\rfloor。$$

对任意 $v \in V(H)$，v 在 G 中的度至多为 $k+n-2$，故有

$$\begin{aligned}\deg(v) &\leq k+n-2 \leq \left\lfloor \frac{p-n+1}{2} \right\rfloor + n - 2 \\ &\leq \frac{p+n-3}{2} < \frac{p+n-2}{2} \leq \left\lceil \frac{p+n-2}{2} \right\rceil。\end{aligned}$$

这与定理条件矛盾，故 G 是 n- 连通的。■

如果图 G 的边连通度 $\kappa'(G) \geq n(n \geq 1)$，则称 G 是 n- 边连通的或者为 n- 边连通图。换句话说，图 G 为 n- 边连通图当且仅当从 G 中删去任意 $n-1$ 条边产生一个连通图。对于 n- 边连通图类可以用下面简单而有用的定理来刻画。

定理 2.12 一个非平凡图 G 是 n- 边连通的当且仅当不存在 $V(G)$ 的非空真子集 W 使得连接 W 和 $V(G)-W$ 的边数小于 n。

证明 设不存在 $V(G)$ 的非空真子集 W 满足：连接 W 和 $V(G)-W$ 的边数小于 n，S 为 G 的任意一个最小边割。因为 $H = G-S$ 是不连通的，设 H_1 是 H 的一个分支。因为连接 $V(H_1)$ 和 $V(G)\backslash V(H_1)$ 的边数恰好是 $|S|$，所以 $\kappa'(G) = |S| \geq n$，即 G 是 n- 边连通的。

反过来，假设 G 是一个 n- 边连通图。如果存在 $V(G)$ 的一个非空真子集 W 满足：连接 W 和 $V(G)-W$ 的边数为 $j(j<n)$，那么删去这 j 条边产生一个不连通图，与 G 为 n- 边连通图矛盾。■

根据定理 2.10，对任意一个图 G，$\kappa'(G) \leq \delta(G)$。下面定理给出了该等式

成立的一个充分条件。

定理 2.13 如果 G 是一个直径为 2 的图，则 $\kappa'(G)=\delta(G)$。

证明 设 S 是 G 的一个最小边割，H_1 和 H_2 是 $G-S$ 的不同分支。不失一般性，假设 $p(H_1)\leq p(H_2)$。

如果存在 H_1 的一个顶点 u 满足 $N_G(u)\cap V(H_2)=\varnothing$，则对于任意 $v\in V(H_2)$，由 $d_G(u,v)=2$ 可得：$N_G(v)\cap V(H_1)\neq\varnothing$。从而对于任意 $u\in V(H_1)$，$N_G(u)\cap V(H_2)\neq\varnothing$ 或者对于任意 $v\in V(H_2)$，$N_G(v)\cap V(H_1)\neq\varnothing$。无论哪一种情况出现，总有

$$\kappa'(G)=|S|\geq\min\{p(H_1),p(H_2)\}=p(H_1) \tag{2.1}$$

对于任意 $u\in V(H_1)$，令 $d_i(u)$ 表示在 G 中 u 与 $V(H_i)(i=1,2)$ 之间连接的边数。故

$$\begin{aligned}\delta(G)&\leq\deg(u)=d_1(u)+d_2(u)\\&\leq p(H_1)-1+d_2(u)。\end{aligned} \tag{2.2}$$

根据定理 2.10，可得

$$\delta(G)\geq\kappa'(G)。 \tag{2.3}$$

由(2.1)，(2.2)，(2.3) 可得对于任意 $u\in V(H_1)$，$d_2(u)\geq1$，设 $n=p(H_1)$，$V(H_1)=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$。故

$$\begin{aligned}\kappa'(G)&=|S|=\sum_{i=1}^{n}d_2(u_i)=\sum_{i=1}^{n-1}d_2(u_i)+d_2(u_n)\\&\geq p(H_1)-1+d_2(u_n)。\end{aligned} \tag{2.4}$$

由(2.2)，(2.3)，(2.4) 可得

$$p(H_1)-1+d_2(u_n)\geq\delta(G)\geq\kappa'(G)\geq p(H_1)-1+d_2(u_n)。$$

因此，$\kappa'(G)=\delta(G)$。■

推论 2.13 如果 G 是 $p(p\geq2)$ 阶图，且对 G 中任意两个不邻接顶点 u 和 v 满足 $\deg(u)+\deg(v)\geq p-1$，那么 $\kappa'(G)=\delta(G)$。

证明 如果 G 中任意两个顶点都是相邻的，则 G 为完全图。由 $p(G)\geq2$ 可得：$\delta(G)=\kappa'(G)=p-1$，结论成立。从而可假设 $\mathrm{diam}(G)\geq2$。根据定理 2.13，只须证明图 $\mathrm{diam}(G)=2$ 即可。从而，可假设 $\mathrm{diam}(G)>2$。故存在 G 中两个顶点 u 和 v 满足 $d(u,v)\geq3$，即 $N(u)\cap N(v)=\varnothing$。又因为 $u,v\notin N(u)\cup N(v)$，所以 $N(u)\cup N(v)\subseteq V(G)\backslash\{u,v\}$，即 $\deg(u)+\deg(v)\leq p-2$，与推论的条件矛盾。■

练习

1. 确定每个完全 n- 部图的连通度和边连通度。

2. 设 G 是一个 n- 连通图，$v_1, v_2, \cdots, v_n$ 是 G 的 n 个不同顶点，向 G 中添加一个新顶点 w 和边集 $\{wv_i | 1 \leq i \leq n\}$ 以后所得的图为 H。证明：$\kappa(H) = n$。

3. 设 G 是 n- 连通的，且 $H = G + K_1$。证明：H 是 $(n+1)$- 连通的。

4. 一个单圈图是一个恰好只有一个圈的连通图。

(a) 如果 G 是单圈图，证明：$\kappa(G) \leq 2$，且 $\kappa'(G) \leq 2$。

(b) 对所有单圈图 G 均有 $\kappa(G) = \kappa'(G) = 2$ 吗？

(c) 存在 $\kappa(G) = 1$ 和 $\kappa'(G) = 2$ 的单圈图 G 吗？

5 对于一个 $p(p \geq 2)$ 阶图 G，定义 G 的 k- 连通度 $\kappa_k(G)(2 \leq k \leq p)$ 为：从 G 中删去顶点的最小个数使得产生一个至少有 k 个分支或者阶比 k 小的 G 的子图（注意：$\kappa_2(G) = \kappa(G)$）。一个图称为 (n,k)- 连通的，如果 $\kappa_k(G) \geq n$。设 G 是一个 p 阶图，且 G 中存在一个阶至少为 k 的顶点子集 S 使得：S 中任意两个顶点不邻接。证明：如果对任意 $v \in V(G)$，

$$\deg_G(v) \geq \left\lceil \frac{p + (k-1)(n-2)}{k} \right\rceil,$$

那么 G 是 (n,k)- 连通的。

6. 设 G 是一个直径为 2 的图。证明：如果 S 是 G 的一个最小边割，那么 $G - S$ 分支中至少有一个同构于 K_1 或 $K_{\delta(G)}$。

7. 设 a,b,c 是正整数，且 $a \leq b \leq c$。证明：存在图 G 满足 $\kappa(G) = a$，$\kappa'(G) = b$ 和 $\delta(G) = c$。

8. (a) 证明：如果 $\delta(G) \geq p - 2$，则 $\kappa(G) = \delta(G)$。

(b) 对于任意自然数 $p(p \geq 4)$，构造图 G 使得 $\delta(G) = p - 3$ 且 $\kappa(G) < \delta(G)$。

2.3 Menger 定理

一个非平凡图 G 是连通的（或等价于是 1- 连通的）当且仅当 G 的任意两个不同顶点之间至少存在一条路。这个事实能以多种方式被推广，大多数都直接和间接地涉及到一个由 Menger 给出的定理，也称为 Menger 定理。

设 G 为一个图，u 和 v 是 G 的不邻接顶点，且 S 为 G 的顶点子集。如果 $G - S$ 为不连通图且 u 和 v 属于 $G - S$ 的不同分支，则称 S 为 G 的 $[u,v]$ 分离集。基数最小的 $[u,v]$ 分离集称为最小 $[u,v]$ 分离集，且最小 $[u,v]$ 分离集的基数称为 G 的 $[u,v]$ 分离数。类似地可以定义相对于边的概念。如果 S 为 $E(G)$ 的子集，$G - S$ 不连通，且 u 和 v 分别属于 $G - S$ 的不同分支，则称 S 为 G 的一个 $[u,v]$ 边分离集；最小基数的 $[u,v]$ 边分离集称为最小 $[u,v]$ 边分离集；最小 $[u,v]$ 边分离集的基数称为 $[u,v]$ 边分离数。

在图 2.4 的图 G 中，存在一个 $[u,v]$ 分离集 $S=\{w_1,w_2,w_3\}$，且 $[u,v]$ 分离数为 3。正像被下面的定理所证实的那样，存在三条 G 中内不交的 u—v 路。

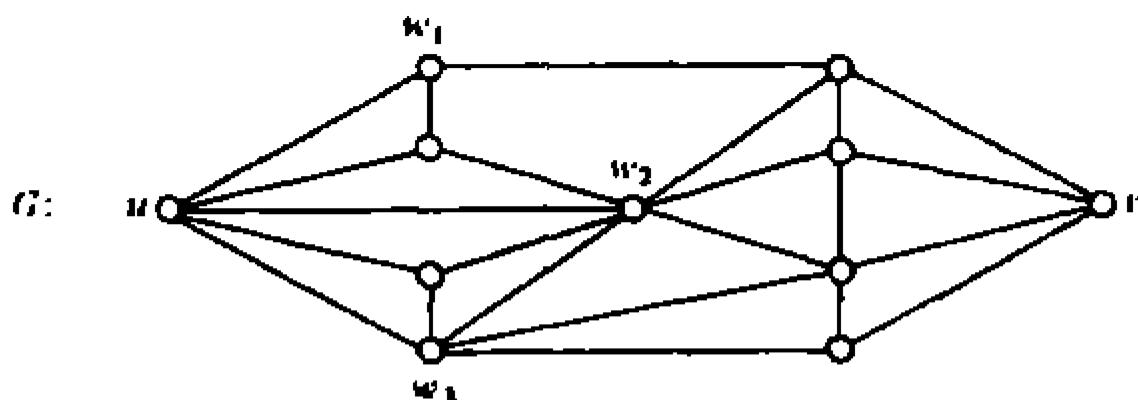


图 2.4 一个说明 Menger 定理的图

定理 2.14(Menger) 设 u 和 v 是图 G 的任意两个非邻接顶点，那么 $[u,v]$ 分离数等于 G 中内不交的 u—v 路的最多条数。

证明 如果 $[u,v]$ 分离数是 $n(n\geq 1)$，那么 G 中内不交 u—v 路的最多条数至多是 n。假设定理结论不成立。选取定理的一个反例图 G 满足：如果 H 也为定理的反例，则 $p(G)<p(H)$，或者 $p(H)=p(G)$ 且 $q(G)<q(H)$。存在 G 中两个不邻接顶点 u 和 v 满足：$[u,v]$ 分离数是 $n(n\geq 1)$，且 G 中不存在 n 条内不交的 u—v 路。由 G 的取法可得：G 为连通图。如果 $n=1$，则 G 中存在 u—v 路，与 G 的取法矛盾，从而可假设 $n>1$。

首先，证明图 G 的三个性质。

性质 1：对于 G 的任意两个邻接顶点 v_1 和 v_2（其中，v_1 和 v_2 都不是 u 或 v），存在 G 中包含 $n-1$ 个顶点的顶点子集 U 满足 $U\cup\{v_i\}(i=1,2)$ 为 $[u,v]$ 分离集。

设 $e=v_1v_2$ 且 $H=G-e$。由 G 的取法可得：H 不是定理的反例且 H 的 $[u,v]$ 分离数 $m\geq n-1$（否则存在 H 的 $[u,v]$ 分离集 U 满足 $|U|\leq n-2$，由 $U\cup\{v_1\}$ 为 G 的 $[u,v]$ 分离集可得，G 中 $[u,v]$ 分离数小于 n，矛盾）。又因为 H 中至多存在 $n-1$ 条内不交的 u—v 路，所以 $m=n-1$。若 U 为 H 的最小 $[u,v]$ 分离集，则 $U\cup\{v_i\}(i=1,2)$ 为 $[u,v]$ 分离集。

性质 2：$N_G(u)\cap N_G(v)=\varnothing$。

假设性质 2 不成立，则存在 $w\in N_G(u)\cap N_G(v)$。设 $H=G-w$。由对性质 1 的讨论可得 H 的 $[u,v]$ 分离数为 $n-1$，且 H 中存在 $n-1$ 条内不交的 u—v 路。显然，H 的 $n-1$ 条内不交的 u—v 路和路 uwv 一起为 G 的 n 条内不交的 u—v 路，与 G 的取法矛盾。

性质 3：如果 $W=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$ 是任意一个最小 $[u,v]$ 分离集，那么 $W\subseteq N_G(u)$ 或者 $W\subseteq N_G(v)$。

设 $H = G - W$，且 H_1 和 H_2 为 H 中分别包含 u 和 v 的分支。令 $G_u = \langle V(H_1) \cup W \rangle$ 且 $G_v = \langle V(H_2) \cup W \rangle$。显然 $V(G_u) \cap V(G_v) = W$。如果 $p(G_u) = n + 1$ 或者 $p(G_v) = n + 1$，则结论成立。假设 $p(G_u) \geq n + 2$ 且 $p(G_v) \geq n + 2$。构造图 G_u^* 为图 G_u 添加一个新顶点 v^* 和边集 $\{v^* w_i | 1 \leq i \leq n\}$。因为 G_u^* 的阶小于 G 的阶，所以 G_u^* 不是定理的反例。如果 G_u^* 中存在 $[u, v^*]$ 分离集 S 满足 $|S| < n$，则 S 为 G 的 $[u, v]$ 分离集，与 G 的取法矛盾。由此可得：G_u^* 的 $[u, v^*]$ 分离数为 n，即 G_u^* 中存在 n 条内不交的 $u—v^*$ 路。类似，可定义 G_v^*，且得到 G_v^* 中也存在 n 条内不交的 $u^*—v$ 路，从而 G 中存在 n 条内不交的 $u—v$ 路。与 G 的取法矛盾。性质 3 成立。

下面完成 Menger 定理的证明。设 P 是 G 中的一条最短 $u—v$ 路。由性质 2，P 的长至少是 3。令 $P = uu_1u_2\cdots v$。由性质 1，存在 G 的基数为 $n - 1$ 的顶点子集 U 使得：$U \cup \{u_1\}$ 和 $U \cup \{u_2\}$ 为最小 $[u, v]$ 分离集。由 $uu_1 \in E(G)$ 以及性质 2 和 3，$U \subseteq N_G(u)$。又因为 $U \not\subseteq N_G(v)$，$U \neq \varnothing$ 及 $n \geq 2$，所以，$u_2 \in N_G(u)$。与 P 为最短 $u—v$ 路矛盾。■

借助于 Menger 定理，下面给出由 Whitney 得到的 n-连通图的特征。

定理 2.15(Whitney)　一个非平凡图 G 是 n-连通的当且仅当对于 G 的任意两个不同顶点 u 和 v，在 G 中至少存在 n 条内不交的 $u—v$ 路。

证明　假设 G 是一个 n-连通图且 G 中内不交 $u—v$ 路的最多条数是 m($m < n$)。如果 $uv \notin E(G)$，那么由定理 2.14，$\kappa(G) \leq m < n$，与假设矛盾。故 $uv \in E(G)$，那么在 $G - uv$ 中内不交 $u—v$ 路的最多条数是 $m - 1 < n - 1$，所以 $\kappa(G - uv) < n - 1$。因此，存在不超过 $n - 2$ 个顶点的顶点子集 U 使得 $G - uv - U$ 是不连通图。故 $G - (U \cup \{u\})$ 和 $G - (U \cup \{v\})$ 中，至少有一个是不连通的，这意味着 $\kappa(G) < n$，这也产生矛盾。

反过来，假设 G 是一个非平凡图，不是 n-连通的，但在这个图中每对不同顶点之间至少存在 n 条内不交路。显然，G 不是完全图。因为 G 不是 n-连通的，所以 $\kappa(G) < n$。设 W 是 G 的一个最小顶点割($\kappa(G) = |W|$)，且 u 和 v 属于 $G - W$ 的不同分支。因为 $uv \notin E(G)$，由假设可得至少存在 n 条内不交的 $u—v$ 路，由定理 2.14，G 中不存在 $[u, v]$ 分离集 S 使得 $|S| < n$。与 $\kappa(G) < n$ 矛盾。■

借助于 Whithey 定理，很容易建立下面的结果。

定理 2.16　如果 G 是 n-连通图，且 $v, v_1, \cdots, v_n$ 是 G 的 $n + 1$ 个不同顶点，则存在 n 条内不交路 $\{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$，其中：$P_i$ 为 $v—v_i$ 路($1 \leq i \leq n$)。

证明　向 G 中添加一个新顶点 u 和所有边 uv_i($1 \leq i \leq n$) 得到一个新图 H。因为 G 是 n-连通的，容易验证 H 也是 n-连通的。由定理 2.14，存在 H 中

n 条内不交 $u—v$ 路，这些路导出 G 的内不交的 $v—v_i$ 路($1 \le i \le n$)。■

2-连通图的一个有趣性质就是这个图的任意两个顶点落在同一个圈上，这个事实被 Dirac 推广到 n-连通图。

定理 2.17 设 G 是一个 n-连通图($n \ge 2$)，那么 G 的任意 n 个顶点落在 G 的同一个圈上。

证明 假设定理不成立，即存在 n-连通图 G，及一个基数为 n 的顶点子集 W 使得对于 G 的任意一个圈 C，$W \not\subseteq V(C)$。选取定理反例中阶数最小的 n-连通图 G。由定理 2.5 可得 $n > 2$。设 W 为 G 的一个基数为 n 的顶点子集且对于 G 的任意一个圈 C，$W \not\subseteq V(C)$，$w \in W$ 且 $W' = W\backslash\{w\}$。令 $H = G - w$，则 $\kappa(H) \ge n - 1$。故 H 是 $(n-1)$-连通的，且不是定理的反例，所以 H 中存在圈 C 满足 $W' \subseteq V(C)$。不妨设 W' 的顶点在 C 上按照次序 w_i($1 \le i \le n-1$) 排列。

假设 $V(C) = W'$。由 G 中存在内不交的 $w—w_i$ 路 Q_i($1 \le i \le n-1$) 可得：Q_1 和 Q_2 一起构成 G 的一条 $w_1 - w_2$ 路 Q 且 $V(Q) \cap V(C) = \{w_1, w_2\}$。用 Q 代替边 w_1w_2 可得到 G 中包含 W 的一个圈。与 G 为定理反例矛盾，所以 $V(C) \ne W'$。

假设 $w_n \in V(C)\backslash W'$。由定理 2.5 可得 G 中存在内不交 $w—w_i$ 路 Q_i($1 \le i \le n$)。对于任意 i($1 \le i \le n$)，设 x_i 是属于 C 的 Q_i 上的第一个顶点(可能 $x_i = w_i$)，并用 Q'_i 表示 Q_i 的 $w—x_i$ 子路($1 \le i \le n$)，则 $x_i \ne x_j$($1 \le i < j \le n$)。存在 C 上的 $w_i—w_{i+1}$ 路($1 \le i \le n-2$) 及 $w_{n-1}—w_1$ 路中的一条路至少包含 $\{x_i \mid 1 \le i \le n\}$ 中的两个顶点。不妨设 x_t 和 x_s($t \ne s$) 属于 C 上的 $w_1—w_2$ 路。用由 Q'_t 和 Q'_s 导出的 $x_t—x_s$ 路代替 $w_1—w_2$ 路上从 x_t 到 x_s 的一段得到 G 中包含 W 的所有顶点的圈。与 W 的取法矛盾。■

由定理 2.11 和定理 2.14 可得，如果 G 是一个 p($p \ge 2$) 阶图，n 是一个整数，$1 \le n \le p - 1$，且对 G 的每个顶点 v 有

$$\deg(v) \ge \left\lceil \frac{p+n-2}{2} \right\rceil,$$

则在 G 的任何两个不同顶点 u, w 之间，存在 n 条内不交的 $u—w$ 路。进一步可以证明这些路中至少有一条的长最多是 2。

定理 2.18 设 G 是一个阶 p($p \ge 2$) 的图，且 n 是一个整数($1 \le n \le p - 1$)。如果对 G 的每个顶点 v 有

$$\deg(v) \ge \left\lceil \frac{p+n-2}{2} \right\rceil,$$

则在 G 的任何两个不同顶点 v, u 之间，存在 n 条内不交的 $v—u$ 路，且这些路中

至少有一条的长度最多是 2。

证明 设 u 和 v 是 G 中任意两个不同顶点，则

$$\deg(u)+\deg(v)\geq\left\lceil\frac{p+n-2}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{p+n-2}{2}\right\rceil\geq p+n-2,$$

又因为 $1\leq n\leq p-1$，所以

$$\deg(u)+\deg(v)\geq p-1。$$

由推论 2.13 的证明可知图 G 的直径为 2，且 G 为 n- 连通图。如果 $n=1$，结论成立。假设 $n>1$。令 $w\in N_G(v)\cap N_G(u)$，且 $H=G-w$。容易验证 H 为 $(n-1)$- 连通的，所以 H 中存在 $n-1$ 条内不交的 $u—v$ 路 $P_i(1\leq i\leq n-1)$。故 $P_i(1\leq i\leq n-1)$ 和 uwv 为 G 中 n 条内不交 $u—v$ 路，且 uwv 的长为 2，结论成立。■

定理 2.13 和定理 2.14 两个都有边的类似结果。Menger 定理的边类似结果由下面定理给出，而且这个定理的证明也与 Menger 定理的证明方法相类似。

定理 2.19 如果 u 和 v 是图 G 的不同顶点，那么 G 的边不交 $u—v$ 路的最多条数等于 G 的 $[u,v]$ 边分离数。

证明 实际上，这个定理的结论可以扩展到 G 是一个多重图（图 G 是多重 图是指 G 中某对顶点之间可以有两条或两条以上的边相关联）的情况，即如果 u 和 v 是一个多重图 G 的同一个分支中的顶点，则定理是正确的。下面证明扩展以后的结论。假设结论不成立，即存在多重图 G 及两个不同顶点 u 和 v 满足：G 的 $[u,v]$ 边分离数为 n，且 G 中至多存在 $n-1$ 条边不交的 $u—v$ 路。选取多重图 G 为结论的最小反例，即如果 H 为结论的任意一个反例，则 $p(G)<p(H)$，或者 $p(G)=p(H)$ 且 $q(G)\leq q(H)$。由 G 的取法及定理 2.3 可得 G 为连通图且 $n>1$。

如果对任意 $e\in E(G)$，e 与 u 或者 v 关联，则结论成立。假设存在 $e\in E(G)$ 满足：e 不与 u 和 v 的任意一个关联。令 $H=G-e$，则 H 不是结论的反例。如果 H 的 $[u,v]$ 边分离数为 n，则 H 中存在 n 条边不交 $u—v$ 路，与 G 的取法矛盾，从而 H 的 $[u,v]$ 边分离数为 $n-1$，即存在 G 的最小 $[u,v]$ 边分离集 S 使得 $e\in S$。由 $G-S$ 恰好包含两个分支 G_u 和 G_v 可得：S 的每一条边的两个端点分别属于不同分支。假设 $S=\{e_i|1\leq i\leq n\}$，且对于任意 $i(1\leq i\leq n)$，$e_i=u_iv_i$，$v_i\in V(G_v)$，$u_i\in V(G_u)$。向 G_u 添加一个新顶点 v' 和所有边 $v'u_i(1\leq i\leq n)$ 得到图 G'_u。同理，可构造图 G'_v。由于 G'_u 和 G'_v 的阶均比 G 的阶小，且 G'_u 的 $[u,v']$ 边分离数和 G'_v 的 $[u',v]$ 边分离数均为 n 可得：G'_u 中存在 n 条边不交 $u—v'$ 路 $P_i(1\leq i\leq n)$；G'_v 中存在 n 条边不交 $u'—v$ 路 $Q_i(1\leq i\leq n)$。由 P_i，

$Q_i(1 \le i \le n)$ 和 S 中的所有边可构造 G 中 n 条边不交 $u—v$ 路。与 G 的取法矛盾。

因为这个定理对 G 是多重图已经证明，所以在 G 是图的情况也有效。■

根据定理 2.19，能够给出一个定理 2.14 的边类似结果。

定理 2.20 一个非平凡图 G 是 n-边连通的当且仅当对 G 的任意两个不同顶点 u 和 v，至少存在 G 中 n 条边不交 $u—v$ 路。

练习

1. 设图 G 满足：$\kappa(G) = 3$，且存在非邻接顶点 u 和 v 使得 G 的$[u,v]$分离数为 4。

(a) 在 G 中内不交 $u—v$ 路最大数是多少？

(b) 给出一个满足上述性质的一个图的例子。

2. 证明：$p(p \ge n+1 \ge 3)$ 阶图是 n-连通的当且仅当对 G 的任意 n 个不同顶点的集合 S 以及 S 的任意两个顶点的子集 T，存在 G 的一个圈包含 T 的顶点而回避 $S-T$ 的所有顶点。

3. 证明：$p(p \ge 2n)$ 阶图 G 是 n-连通的当且仅当对任意两个具有 n 个顶点的不交子集 V_1 和 V_2，存在 n 条连接 V_1 和 V_2 的内不交路。

4. 设 G 是一个 n-连通图且 v 是 G 的一个顶点。对任意正整数 k，定义 G_k 是由 G 中添加 k 个新顶点 $u_1, u_2, \cdots, u_k$ 和所有形如 $u_iw(1 \le i \le k, w \in N_G(v))$ 的边后得到的图。证明：G_k 是 n-连通的。

5. 证明：如果 G 是 n-连通图，且 S_1 和 S_2 是 G 的两个非空不交的顶点子集，那么 G 中存在连接 S_1 和 S_2 的 n 条内不交路 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 使得：$|S_1 \cap V(P_i)| = |S_2 \cap V(P_i)| = 1(1 \le i \le n)$。

6. 证明定理 2.7。

7. 证明定理 2.20。

8. 证明或者否定：如果 G 是一个 n-边连通图且 $v, v_1, \cdots, v_n$ 是 G 的 $n+1$ 个不同顶点，那么对 $i = 1, 2, \cdots, n$，存在 $v—v_i$ 路 P_i 且每个 P_i 恰好包含 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 中一个顶点，即 v_i，且当 $i \ne j$ 时，P_i 和 P_j 是边不交的。

9. 证明或者否定：如果 G 是一个 n-边连通图，S_1 和 S_2 是 G 的非空不交的顶点子集，那么 G 中存在 n 条连接 S_1 和 S_2 的边不交路 $P_i(1 \le i \le n)$ 使得：

$$|S_1 \cap V(P_i)| = |S_2 \cap V(P_i)| = 1(1 \le i \le n)。$$

3 树

在连通图中，树是最简单也是最重要的一种图类。由于树是连通图中边数最少的图，而且每个连通图都包含"生成"树，所以树在连通图性质的研究方面占有很重要的位置，树有着广泛的应用，特别是在计算机科学和最优网络等领域。从而有必要研究树的性质。

3.1 树的基本性质

在第一章中已经给出了树的概念，即一个无圈连通图称为树。另外，存在若干个性质都能作为树的定义。首先，我们注意到树的每条边都是桥，即 G 的每个块是无圈的。反之，如果连通图 G 的每条边都是桥，则 G 是树。

阶为 1，2 或者 3 的树只有一个；而有 2 个阶为 4 的树；3 个阶是 5 的树和 6 个阶是 6 的树，图 3.1 给出了全部阶是 6 的树。如果 u 和 v 是树 G 的任意两个不邻接顶点，那么 $G+uv$ 恰好包含一个圈 C，反之，如 e 是 $G+uv$ 中圈 C 上的任何一条边，则图 $G+uv-e$ 又是树。

对于非平凡树 G，G 的任意一个顶点 v 所属的块数等于 $\deg(v)$。因此 G 的任意一个不是悬挂点的顶点至少属于 2 个块且一定是割点。由定理 2.2 可得如下定理。

定理 3.1 任意一个非平凡树至少有 2 个悬挂点。

可以有许多种方式来刻画树，但有三个特别有用处。

定理 3.2 一个 (p,q) 图 G 是树，当且仅当 G 无圈且 $p=q+1$。

证明 如果 G 是树，根据定义 G 无圈。为了证明等式 $q=p-1$，对 p 进行归纳。当 $p=1$ 时，这个结果（和图）是平凡的。假设对阶为 $p(p\geq 1)$ 的全部 (p,q) 树等式 $p=q+1$ 成立。设 G_1 是一个阶为 $p+1$ 的树，v 是 G_1 的一个悬挂点。图 $G_2=G_1-v$ 是一个 p 阶树，从而 $p=q(G_2)+1$。因为 G_1 比 G_2 多了一个顶点和一条边，所以 $p=p(G_2)+1=(q(G_2)+1)+1=q+1$。

反之，设 G 是一个无圈的 (p,q) 图，且满足 $p=q+1$。为了证明 G 是树，只要证明 G 是连通的。设 G 的所有分支为：$G_1,G_2,\cdots,G_k(k\geq 1)$，且 G_i 是一个

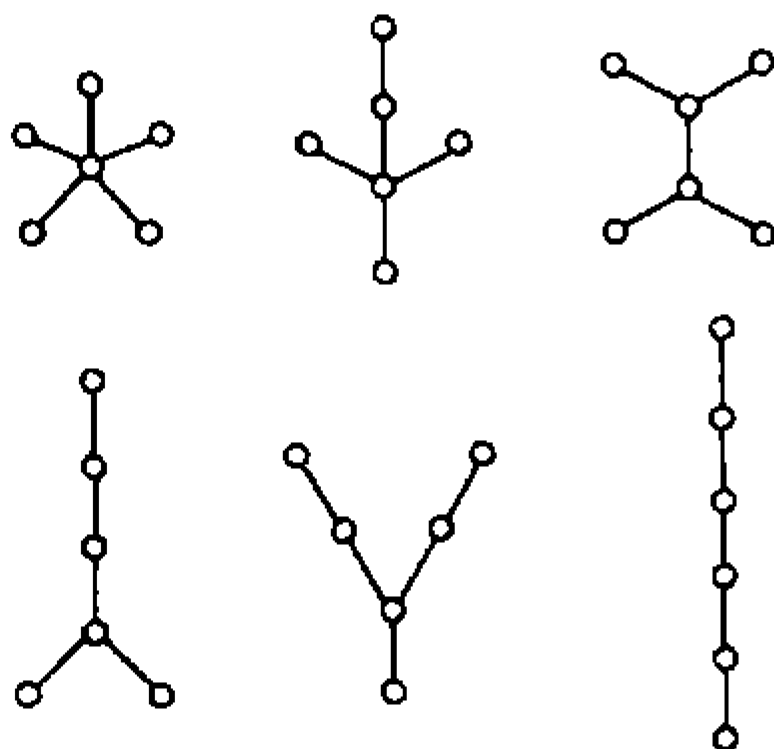


图 3.1 6 阶树

(p_i, q_i) 图($1 \leq i \leq k$)。因为每一个分支 G_i 是连通无圈图，所以 G_i 是树，即 $p_i = q_i + 1$。故

$$p - 1 = q = \sum_{i=1}^{k} q_i = \sum_{i=1}^{k} (p_i - 1) = p - k,$$

从而 $k = 1$，G 是连通的。■

我们又把无圈图称为森林。显然森林的每一个分支是树。同定理 3.2 的证明可以得到下面结果。

推论 3.2 p 阶森林 G 满足 $q(G) = p - k(G)$。

下面给出树的另外一个特征。

定理 3.3 一个(p,q) 图 G 是树当且仅当 G 是连通的且 $p = q + 1$。

证明 设 G 是一个(p,q) 树。由定义可知 G 是连通的。由定理 3.2 可知 $p = q + 1$。

反之，假设 G 为连通的(p,q) 图且 $p = q + 1$。只要证明 G 是无圈的即可。如果 G 有一个圈 C 且 e 是 C 上的一条边，那么 $G - e$ 是一个 p 阶连通图且有 $p - 2$ 条边。由第 1.2 节练习 4(b) 可得这是不可能的，因此 G 是无圈的，即 G 是树。■

由上述几个定理可得：(1) 连通；(2) 无圈和(3)$p(G) = q(G) + 1$ 三个性质中任何两个都刻画了树的特性。值得提到的还有树的另外几个有趣特点。

定理 3.4 图 G 是树当且仅当 G 的任意两个不同顶点之间存在唯一的一条路。

证明 如果 G 是树，那么显然任何两个顶点 u 和 v 之间至少存在一条

u—v 路。如果 u 和 v 之间存在两条不同的 u—v 路，那么 G 中存在圈。与 G 无圈矛盾，故 G 中任意两个不同的顶点之间存在唯一的一条路。

反之，假设 G 的任意两个不同顶点之间存在唯一的一条路。由此可得 G 是连通的。如果 G 有一个圈包含顶点 u 和 v，那么 u 和 v 之间至少存在两条不同的路。与假设矛盾，因此 G 是无圈的，所以 G 是树。■

图 G 的生成树是 G 的生成子图且是树。每个连通图 G 包含一个生成树。如果 G 本身是树，这是显然的。如 G 不是树，则 G 的一个生成树可通过逐次删去圈边，直到最后只剩下桥而得到。如果 G 有 q 条边，则必须删去 $q-p+1$ 条边才能得到 G 的一个生成树。不过能作出比这个更强的结论。连通图 G 的生成树 H 称为与顶点 v 距离保持的，如果对任意一个顶点 $u \in V(G)$，$d_H(v,u) = d_G(v,u)$。

定理 3.5 对连通图 G 的任意一个顶点 v 存在一个与 v 距离保持的生成树。

证明 对于任意一个非负整数 i，设

$$A_i(v) = \{u \in V(G) \mid d(u,v) = i\}。$$

因为 G 是连通的，对任意 $u \neq v$ 存在自然数 $i \neq 0$ 使得 $u \in A_i(v)$。又因为顶点 u 与 $A_{i-1}(v)$ 中至少一个顶点邻接，有可能与 $A_i(v)$ 和 $A_{i+1}(v)$ 中顶点邻接，而与其它的顶点子集 $A_j(v)(j \neq i-1, i, i+1)$ 之间无边相连，即 $N_G(u) \subseteq A_{i-1}(v) \cup A_i(v) \cup A_{i+1}(v)$，且 $N_G(u) \cap A_{i-1}(v) \neq \varnothing$。除留下一条边外删去所有剩下的 u 与 $A_{i-1}(v)$ 之间的边，同时删去所有 u 与 $A_i(v)$ 之间的边。对于所有 $u \neq v$ 重复这个过程，用 H 表示所产生的图。

从 H 构成的方法可知，H 是连通的。因为对每个 $u \neq v$ 在 H 中存在一条 u—v 路，显然 H 是与 v 距离保持的。为了证明 H 是树，只要证明 H 是无圈的。假设 H 包含一个圈 C，w 是 C 上与 v 距离最大的顶点，w_1 和 w_2 在 C 上是与 w 邻接的顶点，且 $w \in A_k(v)$。由 H 的构造方法及 w 的取法可得对 $i=1$ 或 2，$w_i \in A_k(v)$ 或 $A_{k-1}(v)$。如果存在 $w_i \in A_k(v)$，则与 H 的构造方法矛盾。由此可得 $w_1, w_2 \in A_{k-1}(v)$，与在 H 中，w 与 $A_{k-1}(v)$ 之间仅有一条边产生矛盾。因此 H 是无圈的，从而是树。■

图 3.2 表示一个连通图 G 和 G 的一个与顶点 v 距离保持的生成树。

一般说来，由于树的结构简单，且任意一个连通图包含一些树作为子图，从而当试图证明关于图的某些结果时，首先从树进行研究是一个非常有效的途径。当然，任意一个阶不超过 p 的树都是 K_p 的子图。下面给出一个一般的结果。

定理 3.6 设 T 是阶为 m 的任意树。如果 G 是一个 $\delta(G) \geq m-1$ 的图，

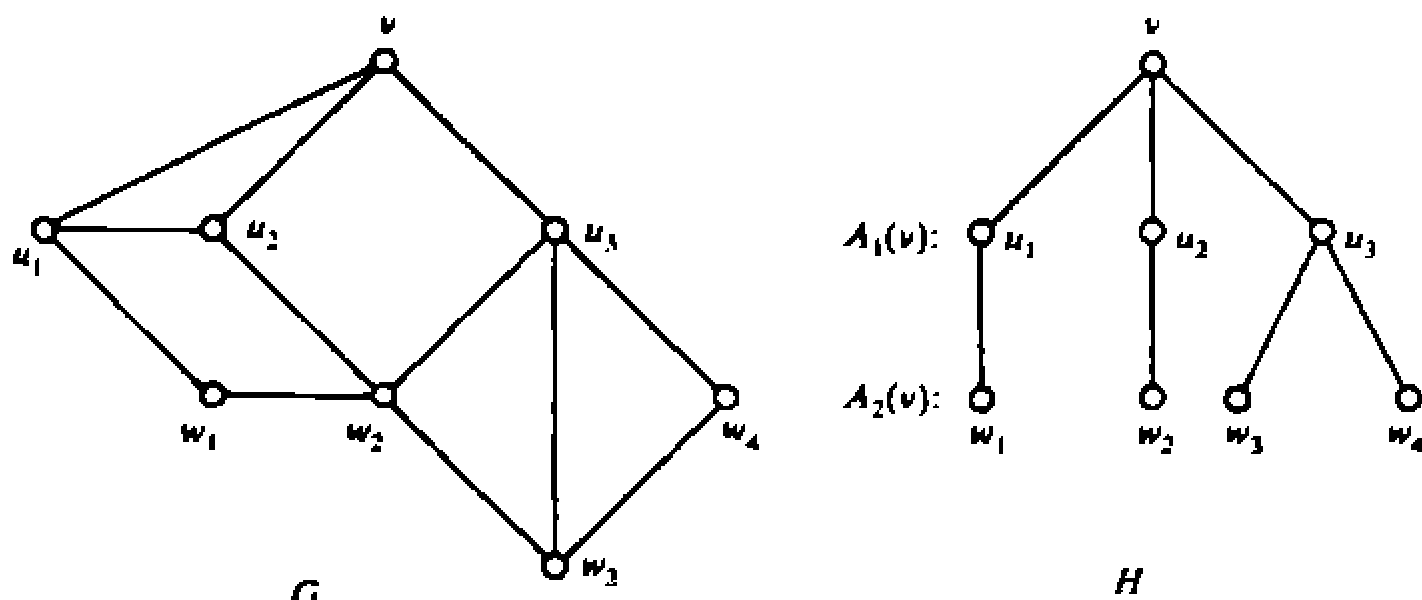


图 3.2 一个连通图 $G(v \in V(G))$ 和一个与 v 距离保持的生成树 H

那么 T 是 G 的一个子图。

证明 对 m 进行归纳证明。当 $m=1$，结果是明显的，因为 K_1 是任何图的子图。当 $m=2$，K_2 是任意一个非空图的子图。

假设对任意一个阶为 $m-1(m\geq 3)$ 的树 T' 以及任意一个满足 $\delta(H)\geq m-2$ 的图 H，T' 是 H 的子图。设 T 是阶为 m 的树，G 是任意一个满足 $\delta(G)\geq m-1$ 的图。下面证明 $T\subseteq G$。

设 v 是 T 的一个悬挂点，且 $uv\in E(T)$，则图 $T-v$ 是阶为 $m-1$ 的树。由图 G 满足 $\delta(G)\geq m-1>m-2$ 以及归纳假设，$T-v$ 是图 G 的子图。设 u' 表示 G 中对应于 u 的顶点。因为 $\deg_G(u')\geq m-1$ 且 $T-v$ 的阶为 $m-1$，所以存在顶点 $w\in N_G(u')$ 满足 w 不与 $T-v$ 的任意一个顶点对应。令 w 与 v 对应可得 $T\subseteq G$。■

练习

1. 画出全部非同构的 6 阶森林。

2. 证明：任意一个非平凡树 T 的悬挂点数为：

$$2+\sum_{\deg_T(v)>1}(\deg_T(v)-2)。$$

3. 设 v 是完全二部图 $K_{2,4}$ 的度为 2 的顶点。证明：$K_{2,4}$ 包含两个不同构且与 v 距离保持的生成树。

4. 证明：任意一个阶至少为 3 的树包含一个割点 v 满足至多除一个例外，与 v 邻接的所有顶点是悬挂点。

5. 一个树被称为单中心和双中心取决于它的中心是由一个顶点组成还是两个邻接顶点组成。

(a) 证明:每个树是单中心或双中心的。

(b) 设 T 是一个具有直径为 d 且半径为 r 的树。证明:T 是单中心还是双中心的取决于 $d=2r$ 还是 $d=2r-1$。

6. (a) 证明:非平凡树的最长路的起点和终点均为悬挂点。

(b) 利用(a)证明每个非平凡树至少有两个悬挂点。

(c) 证明:恰好有两个悬挂点的树是一条路。

3.2 Cayley 公式

虽然没有一个方便的公式来计算 p 阶非同构树的个数,但对 p 阶非恒等树的个数存在一个计算公式。这个结果首先由 Cayley 证明,现在这个结果被很多数学家用各种数学方法证实。这里给出的证明是由 Clarke 得到的。

下面介绍的是对于一个图的非恒等生成树的数目的递推公式。在给出这个公式之前,我们先介绍关于边的收缩运算。如果 $e=uv$ 为 G 的一条边,则从 G 中删去边 e,并使两个顶点 u 和 v 重合,这样得到的图称为边 e 的收缩图,记为 $G\cdot e$。值得指出的是这样得到的两个不同顶点之间可以有两条或两条以上的边连接,这种图前面已经指出称为多重图。此外一条边也可以和同一个顶点关联,而这种边就称为环。我们称这样的图为伪图。图 3.3 表明了收缩一条边的效果。

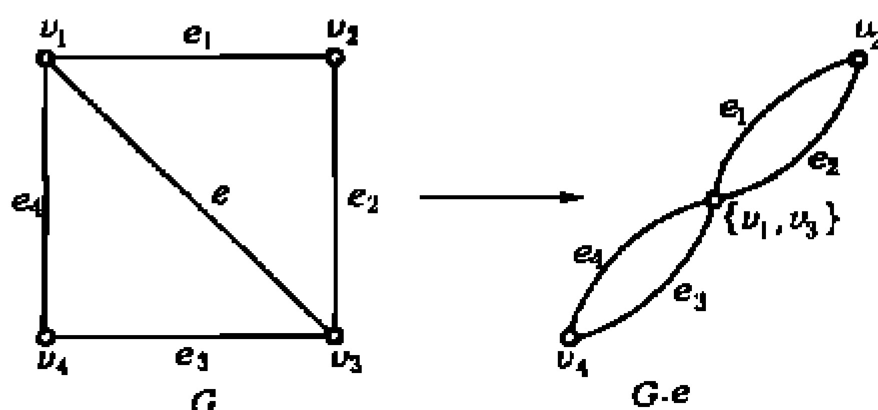


图 3.3 边收缩图

显然若 e 是 G 的边(不是环),则

$$p(G\cdot e)=p(G)-1,$$

$$q(G\cdot e)=q(G)-1 \text{ 且 } k(G\cdot e)=k(G)。$$

所以若 T 是树,则 $T\cdot e$ 也是树。我们用 $\tau(G)$ 记 G 的非恒等生成树的数目,为了叙述方便,也称为生成树的数目。

定理 3.7 若 e 是图 G(或伪图)的一条边,则

$$\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G\cdot e)。$$

证明 图G(或伪图)的任意一个不包含e的生成树也是$G-e$的生成树，反之，$\tau(G-e)$就是G的所有不包含e的生成树的数目。

对于G的任意一个包含e的生成树T，存在$G\cdot e$的一个生成树$T\cdot e$与之对应。这个对应显然是一个一一对应(见图 3.4)，所以$\tau(G\cdot e)$恰好是G中所有包含e的生成树的个数。由此可知：

$$\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G\cdot e)。\blacksquare$$

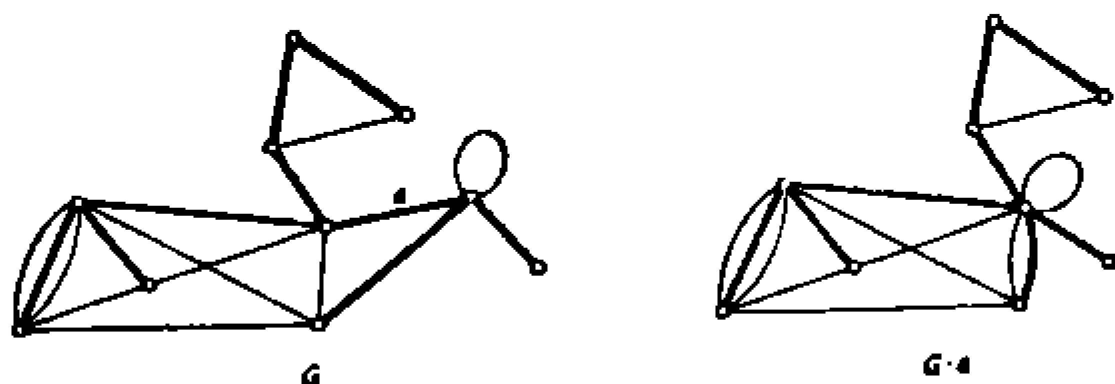


图 3.4

根据定理 3.7，图 3.5 给出了$\tau(G)$的递推计算方法，其中图的生成树的个数由这个图本身象征性地表示着。

$\tau(G)=$

$=8$

图 3.5 $\tau(G)$的递推计算

定理 3.3 虽然提出了一个计算图的生成树个数的方法，但这个方法对于大的图并不适用。在G是完全图这一特殊情况下，Cayley(1889) 发现了$\tau(G)$的一个简单公式。本书的证明是 1918 年由 Prufer 提出的。

定理 3.8 对于任意自然数p，$\tau(K_p)=p^{p-2}$。

证明 设K_p的顶点集是$V=\{1,2,\cdots,p\}$。注意，由V的元素可能组成的长为$p-2$的可重复排列的个数是p^{p-2}，为了证明本定理，只须在K_p的生成树的集和这种可重复排列的集之间建立一一对应就行了。

对于K_p的每一个生成树T，使它与唯一的一个可重复排列：$t_1,t_2,\cdots,t_{p-2}$相对应。把V看作有序集，取s_1是T中编号最小的1度顶点，记与s_1相邻的顶点为t_1，记$T_1=T-s_1$；取s_2为T_1中编号最小的1度顶点，记与s_2相邻的顶点为t_2，记$T_2=T_1-s_2$。重复这个过程，直到t_{p-2}被确定，留下来的T_{p-1}恰好是有两个顶点的树。例如：图3.6中的树产生序列4,3,5,3,4,5。可见K_p的不同生成树确定不同的可重复排列。

逆过程同样易懂。首先注意T的任意一个顶点v在可重复排列$t_1,t_2,\cdots,t_{p-2}$中出现了$\deg_T(v)-1$次。于是T中1度顶点恰好是在该可重复排列中未出现的那些顶点。为了从可重复排列$t_1,t_2,\cdots,t_{p-2}$中重新构造出T，可按下述方法进行：取s_1为$V\backslash\{t_i|1\leq i\leq p-2\}$的最小编号顶点，连接$s_1$和$t_1$；其次取$s_2$为$V\backslash(\{s_1\}\cup\{t_i|2\leq i\leq p-2\}$的最小编号顶点，并连接$s_2$和$t_2$。如此继续下去，直至确定了$p-2$条边$s_1t_1,s_2t_2,\cdots,s_{p-2}t_{p-2}$。现在添加一条连接$V\backslash\{s_1,s_2,\cdots,s_{p-2}\}$的两个顶点的边，即可得$T$。容易验证不同的序列产生$K_p$的不同生成树。这样就建立了所要的一一对应。■

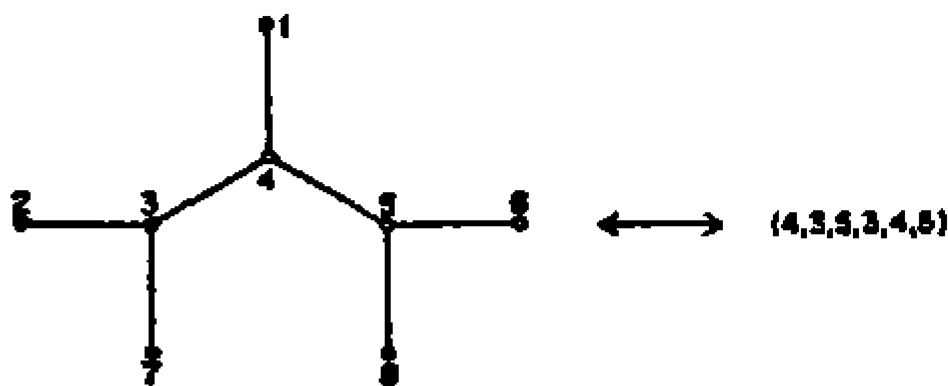


图 3.6

注意：p^{p-2}不是K_p的非同构生成树的个数，而是K_p的非恒等生成树的个数。K_6只有6个非同构的生成树（见图3.1），而K_6的不同生成树恰有$6^4=1296$个。

练习

1. 利用定理3.7的递推公式，计算$K_{3,3}$的生成树个数。
2. 画出K_4的所有16个非恒等生成树。
3. 证明：若e是K_p的边，则$\tau(K_p-e)=(p-2)p^{p-3}$。

3.3 连线问题

设给定 p 个城市 $v_1, v_2, \cdots, v_p$，且两个城市 v_i 和 v_j 之间直接修通一条铁路需要的费用为 x_{ij}。试设计一个总造价最低的铁路网把这些城市连起来。这个问题反映在图论上，就是在赋权图 G 中，找出具有最小权的连通子图 —— 最小权生成树，即所谓最优树。图论中的连线问题就是指在一个连通赋权图 G 中寻求最优树。图 3.7 的赋权图中用粗线指出的生成树是一个最优树。

设 G 为任意一个连通赋权图，且任意一条边 e 的权为 $w(e)$。下面给出在非平凡赋权图中寻找最优树的一个好算法，从而解决了连线问题。

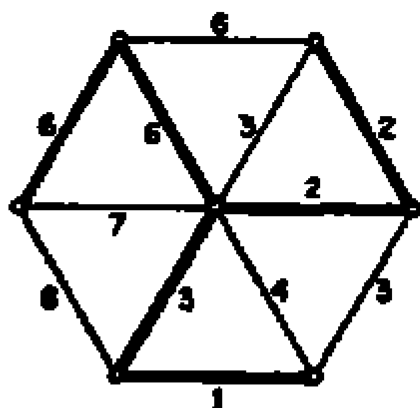


图 3.7 赋权图中的最优树

算法 3A Kruskal 算法

第一步 令 $i = 0, S = \varnothing$，且 $E = E(G)$。

第二步 选择边 e_i 为 E 中权最小的边，用 $E \setminus \{e_i\}$ 代替 E。

第三步 如果 $(S \cup \{e_i\})$ 为无圈图，则用 $S \cup \{e_i\}$ 代替 S，且用 $i+1$ 代替 i。

第四步 如果 $i < p(G) - 1$，则转向第二步，否则算法结束。

作为一个例子，考察世界上六个最大城市：伦敦(L)，墨西哥城(MC)，纽约(NY)，巴黎(Pa)，北京(Pe)和东京(T)之间的航线距离(以百英里作单位)表：

	L	MC	NY	Pa	Pe	T
L	—	5558	3469	214	5074	5959
MC	5558	—	2090	5725	7753	7035
NY	3469	2090	—	3636	6844	6757
Pa	214	5725	3636	—	5120	6053
Pe	5074	7753	6844	5120	—	1307
T	5959	7035	6757	6053	1307	—

此表确定了一个顶点为 L,Me,NY,Pa,Pe 和 T 的赋权完全图,它的最优树的构作过程在图 3.8 中表示(其中,距离以百英里计)。

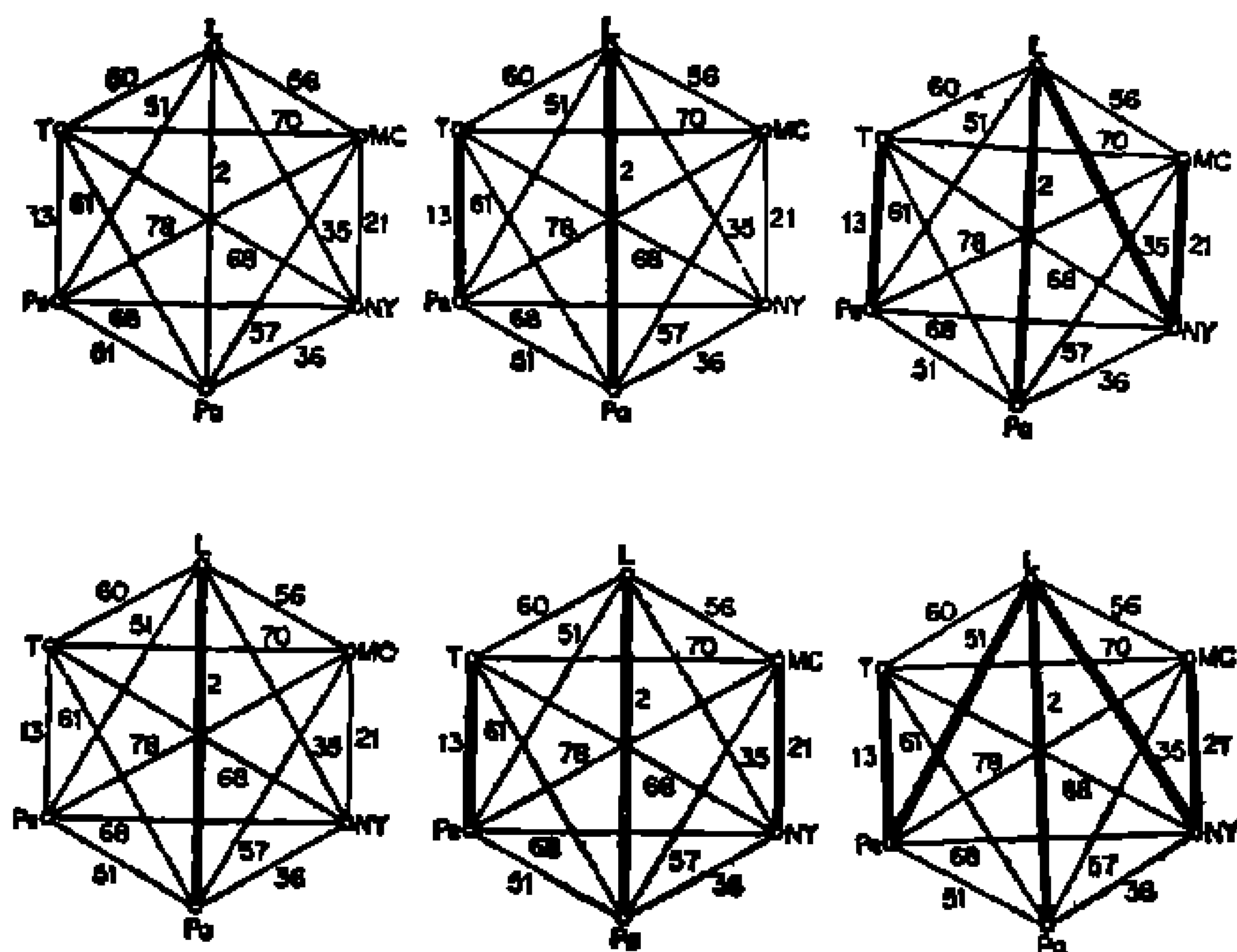


图 3.8 最优生成树生成过程

Kruskal 算法显然产生了一个生成树。下面定理确保这样的树总是最优的。

定理3.9 设G为一个连通赋权图,则由Kruskal算法构造的任意一个生成树 $T(E(T)) = \{e_i | 1 \leq i \leq p-1\})$ 都是最优树。

证明 用反证法。假设T不是一个最小生成树,并且T的权由下式给出:

$$w(T) = \sum_{i=1}^{p-1} w(e_i)。$$

在G的最小生成树中,选取H是一个与T有最多公共边的最小生成树。因为H不等于T,所以T中至少存在一条边不属于H。设e_i为$E(T)\backslash E(H)$中权最小的边,且C为$H+e_i$的唯一的一个圈。因为T是无圈的,所以至少存在一条边$e_0 \in E(C)\backslash E(T)$。设$T_0 = H + e_i - e_0$,则$T_0$为$G$的生成树,且

$$w(T_0) = w(H) + w(e_i) - w(e_0)。$$

因为$w(H) \leq w(T_0)$,从而$w(e_i) \geq w(e_0)$。然而由算法可知e_i是一条使得$(\{e_1, \cdots, e_{i-1}, e_i\})$无圈的最小权的边。因为$(\{e_1, e_2, \cdots, e_{i-1}, e_0\})$是无圈的,所

以 $w(e_i) \leq w(e_0)$，即 $w(e_i) = w(e_0)$，从而 $w(T_0) = w(H)$。这就是说 T_0 也是 G 的最小生成树，但是 $|E(T_0) \cap E(T)| > |E(H) \cap E(T)|$，与 H 的取法矛盾。■

Kruskal 算法的框图如图 3.9 所示。首先把边按照边权递增顺序排列（框 1），这约需 $q\log q$ 次计算（见 Knuth，1973）。框 2 仅仅是检查已选了多少条边（S 是已选定的边的集，而 i 是 S 的基数）。当 $i = p - 1$ 时，$S = \{e_1, e_2, \cdots, e_{p-1}\}$ 就是 G 的最优树 T' 的边集。在框 3 中进行判断：为了检查 $\langle S \cup \{a_j\} \rangle$ 是否无圈，就必须查明 a_j 的端点是否在森林 $\langle S \rangle$ 的不同分支中。这可用下面的方法来实现。在任意一步中，这样来给顶点标号。两个顶点属于 $\langle S \rangle$ 的同一分支当且仅当它们有相同的标号。最初顶点 v_i 赋以标号 $i(1 \leq i \leq p)$。按照这个标号方案，$\langle S \cup \{a_j\} \rangle$ 是无圈的当且仅当 a_j 的端点有不同的标号。若 a_j 的端点标号不同，就取 a_j 作为 e_{i+1}；否则就抛弃 a_j，再检验 e_{i+1} 的下一个候选者 a_{j+1}。一旦 e_{i+1} 加进 S，在各含有 e_{i+1} 一个端点的 $\langle S \rangle$ 的两个分支中，用两个标号中较小者，对两个分支中所有顶点重新标号。对于任意一条边，一次比较就足以判定它的端点是否有相同的标号，全过程要 q 次计算。边 e_{i+1} 放入 S 之后，顶点重新标号最多要 p 次比较，因此对所有 $p-1$ 条边 $e_1, e_2, \cdots, e_{p-1}$ 最多需 $p(p-1)$ 次计算。所以 Kruskal 算法是一个好算法。

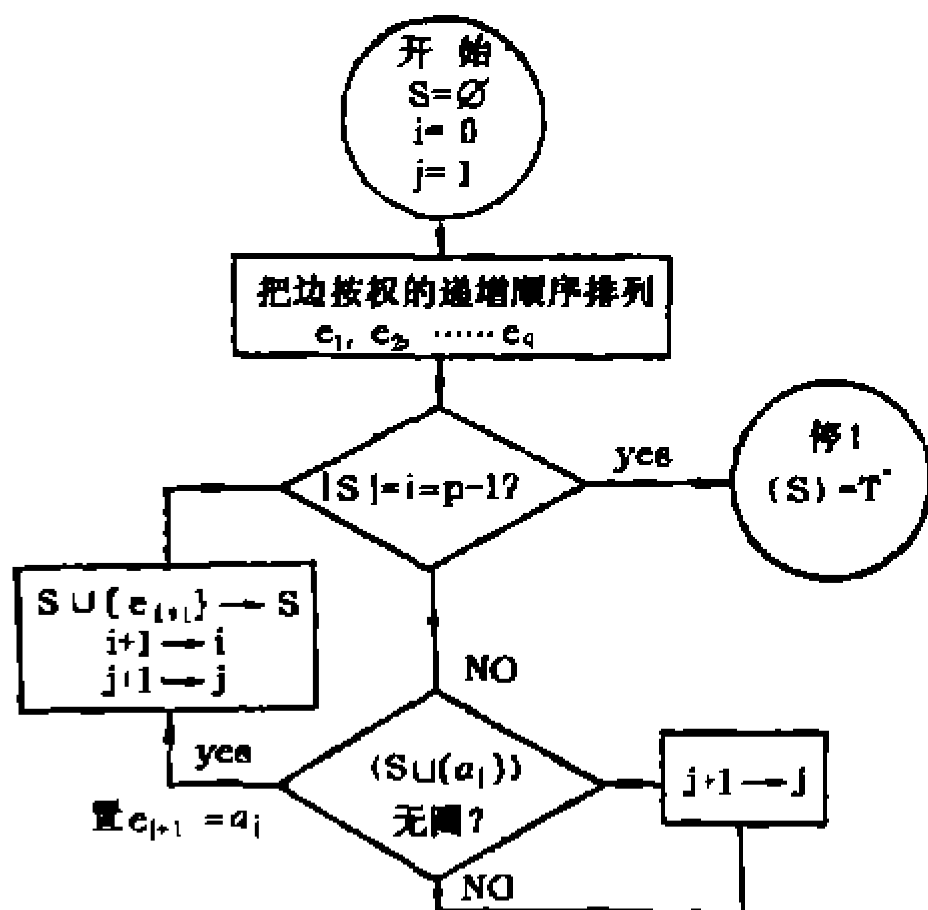


图 3.9 Kruskal 算法

练习

1. 应用 Kruskal 算法证明：图 3.5 中给出的图是最优的。

2. Kruskal 算法能否用来求：

(a) 赋权连通图中的有最大权的树？

(b) 赋权图中的有最小权的最大森林。如果可以，怎样实现？

3. 证明：在赋权完全图中，下述 Kruskal 型算法并不一定产生有最小权的生成路：

(1) 选边 e_1，使得 $w(e_1)$ 尽可能小。

(2) 若边 $e_1, e_2, \cdots, e_i$ 已选定，则用下述方法从 $E \setminus \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中选一条边 e_{i+1} 满足：

(a) $\langle\{e_1, e_2, \cdots, e_{i+1}\}\rangle$ 是不相交路的并图。

(b) $w(e_{i+1})$ 是满足(a) 的尽可能小的权。

(3) 当第二步不能继续执行时则停止。

3.4 图的无圈子图分解

图论中最重要的课题是研究图具有某种规定性质的子图分解。通常这种问题可以分为两类：一类是考虑顶点集的分解；而另一类是考虑边集的分解。我们现在要考虑的就是具有无圈性质的子图分解。

对于任何图 G 总可能把 $V(G)$ 分成不交子集 $V_i(1 \leq i \leq n)$ 的并，使每一个导出子图 $\langle V_i \rangle$ 是无圈的，即为森林。如果选择每一个 V_i 满足 $|V_i| \leq 2$，就可以达到无圈子图分解的目的。不过子图分解问题的重点是研究在 $V(G)$ 的所有满足给定性质的分法之中最少需要将 $V(G)$ 分为几个子集以及如何分解。

上面的叙述暗示了一个新概念 —— 图的点荫度。设 G 为任意一个图。如果 $V(G)$ 的一个子集族 $\mathscr{F} = \{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$ 满足：(1) $V(G) = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$；(2) 对于任意 $1 \leq i < j \leq n$，$V_i \cap V_j = \varnothing$；(3) 对于任意 $1 \leq i \leq n$，$\langle V_i \rangle$ 是无圈的，则称 $\mathscr{F}$ 为 G 的一个点荫度划分，且 G 的所有点荫度划分中子集个数 n 的最小值称为 G 的点荫度，记为 $a(G)$。显然对于任意一个图 G，$a(G) = 1$ 当且仅当 G 是无圈的。只有很少几类图的点荫度是容易确定的，如 $a(C_p) = 2$；当 p 是偶数时，则 $a(K_p) = \frac{p}{2}$，当 p 是奇数时，则 $a(K_p) = \frac{p+1}{2}$；类似地，如果 $m = 1$ 或 $n = 1$，则 $a(K_{m,n}) = 1$，否则 $a(K_{m,n}) = 2$。关于一个图的点荫度一般并没有公式，自然对于这个数某些界是存在的。首先，对于任何 p 阶图 G 有

$$a(G) \le \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil。\tag{3.1}$$

(3.1) 式这个界根本没有多大的意义。为了提出一个好的界，我们还需引进一个新的概念。

图 G 称为关于点荫度是临界的或者点荫度临界的，如果对 G 的任意一个顶点 v 有 $a(G-v) < a(G)$。这是我们碰到的当一个图被定义为关于某个参数是临界时的第二种情况。为了避免累赘的用语，在上下文对这个参数都明了的情况下，我们将简单地使用术语"临界"。尤其是，在这一节图 G 关于点荫度是临界的，我们就称为临界图。如果 $a(G)=n$，我们就进一步称为 n-临界图。容易验证完全图 K_{2n-1} 是 n-临界图；而每一个圈是 2-临界的。确定临界图并不困难，的确，对于任意一个满足 $a(G)=n\ge 2$ 的图，将导出一个 n-临界子图。事实上，G 的任何导出子图 G' 如有 $a(G')=n$ 和最小阶，则 G' 是 n-临界的。

在提出关于 $a(G)$ 上界以前，我们给出另外一个结果。

定理 3.10 如果 G 是一个 n-临界图($n\ge 2$)，即 G 是满足 $a(G)=n\ge 2$ 的点荫度临界图，则 $\delta(G)\ge 2(n-1)$。

证明 设 G 是一个 n-临界图($n\ge 2$)，G 包含一个度小于等于 $2n-3$ 的顶点 v。因为 G 是 n-临界的，所以有 $a(G-v)=n-1$，并且存在一个 $G-v$ 的一个点荫度分划 $\{V_1,V_2,\cdots,V_{n-1}\}$。由于 $\deg(v)\le 2n-3$，所以在这些子集中至少有一个，比方说 V_j 至多包含一个在 G 中与 v 邻接的顶点。子图 $\langle V_j\cup\{v\}\rangle$ 必然无圈，所以 $\{V_1,V_2,\cdots,V_j\cup\{v\},\cdots,V_{n-1}\}$ 是 G 的一个点荫度划分且基数为 $n-1$，与 $a(G)=n$ 的事实矛盾。■

现在我们能够提出期望的上界。注意记法 $H\prec G$ 代表 H 是 G 的一个导出子图。

定理 3.11 对任何图 G，

$$a(G) \le 1 + \left\lfloor \frac{\max\{\delta(H) \mid H \prec G\}}{2} \right\rfloor。$$

证明 这个结果对无圈图是显然的。设 G 是满足点荫度 $a(G)=n\ge 2$ 的图，H 是 G 的一个 n-临界子图。由于 H 本身是 G 的一个导出子图，所以

$$\delta(H) \le \max\{\delta(G') \mid G' \prec G\}。\tag{3.2}$$

由定理 3.10 可得 $\delta(H)\ge 2n-2$，所以由(3.2) 可知：

$$\max\{\delta(G') \mid G' \prec G\} \ge 2n-2 = 2a(G)-2。$$

这个不等式就得出了我们所要的结果。■

设 $\Delta(G)$ 表示图 G 中顶点度的最大值，称为 G 的最大度。对 $G'\prec G$，因为 $\delta(G')\le\Delta(G)$，所以我们可得下面结论。

推论 3.12 对任何图 G，

$$a(G) \leq 1 + \left\lfloor \frac{\Delta(G)}{2} \right\rfloor。$$

我们现在回到第二种子图分解问题。如果存在图 G 的边集 $E(G)$ 的一个划分 $\{E_i | 1 \leq i \leq n\}$ 满足：(1) $E(G) = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$；(2) 对于任意 $1 \leq i < j \leq n$，$E_i \cap E_j = \varnothing$ 和 (3) 对任意 $1 \leq i \leq n$，$\langle E_i \rangle$ 是无圈的，则称 $\{E_i | 1 \leq i \leq n\}$ 为 G 的边荫度划分，且所有边荫度划分中基数 n 的最小值称为 G 的边荫度或简称为荫度，记为 $a'(G)$。与点荫度类似可得一个非空图满足 $a'(G) = 1$ 当且仅当该图是森林。不过与点荫度不同的是对于任何图 G，存在一个计算 $a'(G)$ 的公式。

定理 3.12(Nash — Williams) 对任何非空图 G，

$$a'(G) = \max\left\{\left\lceil \frac{q(H)}{p(H) - 1} \right\rceil \middle| H \prec G\right\}。$$

作为定理 3.12 的推论，我们有

$$a'(K_p) = \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil \text{且 } a'(K_{m,n}) = \left\lceil \frac{mn}{m + n - 1} \right\rceil。$$

有趣的是当 p 是偶数时，K_p 能够被表示为 $\frac{p}{2}$ 个生成树的边和；且当 p 是奇数时，K_p 能够被表示为 $\frac{p+1}{2}$ 个子图的边和，其中 $\frac{p-1}{2}$ 个子图与 P_{p-1} 同构，而另一个与 $K_{1,p-1}$ 同构。

练习

1. 根据定理 3.11 和推论 3.11 给出 $a(K_{1,n})$ 的上界？

2. 设 G 是关于点荫度的 n-临界图($n \geq 3$)。证明：对于 G 的任何一个顶点 v，图 $G - v$ 不是关于点荫度 $(n - 1)$-临界的。

3. 给出一个图的例子，它有一个非空导出子图 H，且

$$\left\lceil \frac{q(G)}{p(G) - 1} \right\rceil < \left\lceil \frac{q(H)}{p(H) - 1} \right\rceil。$$

从而证明，一般地有

$$a'(G) \neq \left\lceil \frac{q(G)}{p(G) - 1} \right\rceil,$$

确定关于这种图的 $a'(G)$。

4 Euler 图和 Hamilton 图

在这一章里，讨论图论中一些在历史上很负盛名的迹、回路和圈。对于这些迹、回路和圈的研究，一直是图论研究的主要课题，它们极大地促进了图论理论的发展。

4.1 Euler 图

很难说"图"这个术语起源于何时、何地，但通常认为，图和图论的概念在18世纪初期的瑞士就可能已经提出。但无论如何，人们认为著名的瑞士数学家 Leonhard Euler 在考虑 Königsberg 七桥问题时，就使用了"图"的术语，从而 Euler 被公认为图论的创始人。

图 4.1 表示了18世纪 Königsberg 城的地理图，Pregel 河穿过 Königsberg 城，把陆地分成 4 块。河上架起七座桥，这七座桥把河中两个小岛和两岸陆地彼此连接起来。就象 Euler 所作的那样，我们用字母 A,B,C,D 代表这四块陆地。

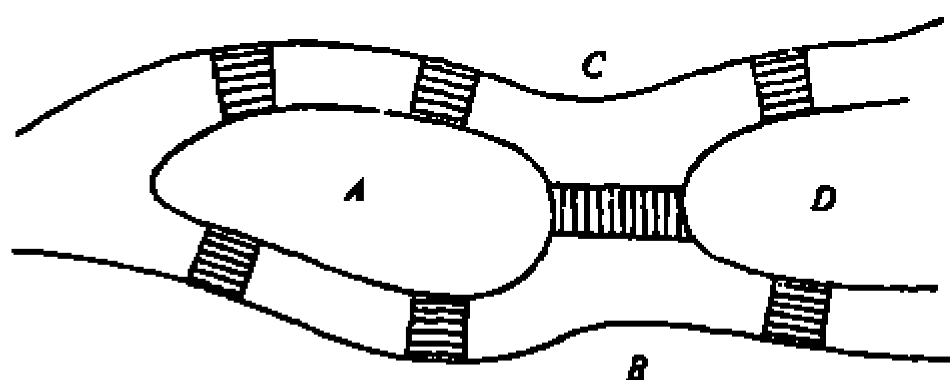


图 4.1 Königsberg 七桥

据说，替自己逗乐的 Königsberg 市民们给自己出了一道难题：希望找到一条恰好穿过每座桥一次的散步路线。这就是著名的 Königsberg 七桥问题。

Euler 证明了在 Königsberg 七桥问题中，恰好穿过每座桥一次的路线是不存在的。实际上，对于 Königsberg 的许多市民来说也相信这个事实，不过他们认为 Euler 对这个问题的处理方法更具有说服力。

Euler 对于 K önigsberg 七桥问题的研究采用如下方法：如果存在这样的一条路线，它应该能用八个字母的序列来表示，其中序列中的每一个字母从 A，B，C，D 四个字母中选取，序列中一个项就代表这条线路行进到的一块特定陆地，而两个连续项就代表由一块陆地到另一块陆地所要通过的一座桥。因为每座桥只被穿过一次，而 A 和 B 之间有两座桥，所以字母 A 和 B 在这个序列中作为连续项必须出现两次，A 和 C 也具有同样的特性。

由于有五座桥通向陆地 A，从而字母 A 在序列中出现总次数必须是三次，其中两次代表进入陆地 A 且从陆地 A 中退出，而另一次则代表或者进入陆地 A 或者从陆地 A 中离开。类似地，字母 B，C 和 D 的每一个必须在序列中出现两次，不过这就意味着这个序列必须有九项，这是不可能的，所以要设计这样一条环绕K önigsberg 桥的路线也是不可能的。

K önigsberg 七桥问题在许多方面带有"图"的色彩，即环绕 K önigsberg 桥的路线的 Euler 表示实质是图上的一条途径。如果 K önigsberg 的每块陆地区域用一个顶点来表示，两个顶点之间连接的边数与连接相应陆地区域的桥数相等，由此产生的结构（见图 4.2）就是前面已经提到的多重图。

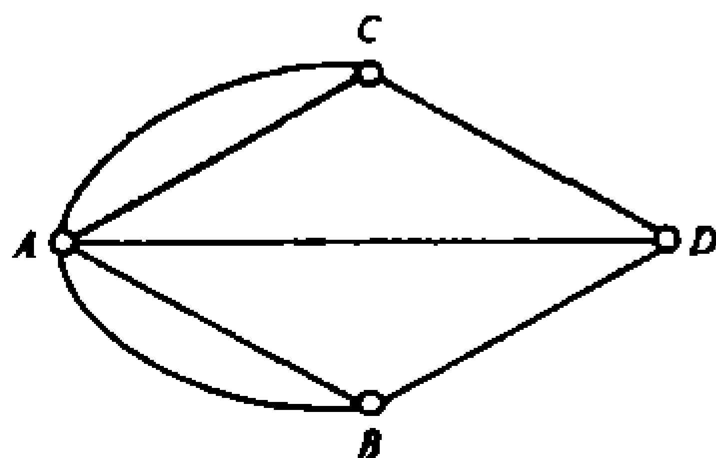


图 4.2　K önigsberg 多重图

那么，K önigsberg 七桥问题等价于确定图 4.2 中的多重图是否有一条包含它的全部边的迹。

K önigsberg 七桥问题提出了下面两个概念：一个连通图（或多重图）G 的一条 Euler 迹是包含 G 的全部边的一条开迹，而 G 的一条 Euler 回路是包含 G 的全部边的一条回路。具有 Euler 回路的一个图（或多重图）称为 Euler 图。图 4.3 中的图 G_1 包含一条 Euler 迹，而 G_2 是一个 Euler 图。

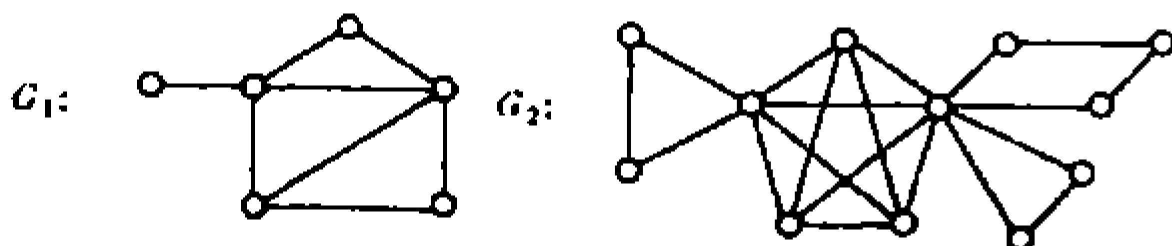


图 4.3　有 Euler 迹和 Euler 回路的图

Euler 图和具有 Euler 迹的图的简单而有用的特点是存在的，事实上，Euler 已经知道了这两类图的特点，然而这些结果的完全证明直到 1873 年由

Hierholzer 发表的论文还没有给出。下面的结果由 Fowler 证明。

定理 4.1(Euler) 设 G 是一个非平凡连通图(或多重图),那么 G 是 Euler 图当且仅当 G 的所有顶点都是偶顶点。

证明 设 G 是一个具有 Euler 回路 C 的 Euler 图,v 是 G 的任意一个顶点。如果 v 不是 C 的始点(从而也不是终点),那么 v 在 C 上每出现一次,它必须以不同的边进入和退出 v,这样在 C 上 v 的每次出现就表示 v 的度增加 2,从而 v 是偶顶点。如果 v 是 C 的始点,那么 C 以 v 开始和结束,这就使 v 的度加了两次 1,而 v 的其余每次出现同样使 v 的度增加 2,从而 v 也是一个偶顶点,所以在任何一种情况下 v 是偶顶点。

反过来,对每一个顶点都是偶顶点的非平凡连通图(或多重图)的大小 q 进行归纳。

如果 $q=2$,那么这个图包含两个顶点和两条边,且两条边有相同的端点。显然该图存在一条 Euler 回路。

假设每一个大小小于 $q(q\geq 3)$。且所有顶点为偶顶点的非平凡连通图(或多重图)包含一条 Euler 回路。

设 G 是 $|E(G)|=q$ 且所有顶点都是偶顶点的连通图(或多重图)。

如果 G 的阶为 2,那么这两个顶点用偶数条边(至少 4 条边)连接,从而 G 包含一条 Euler 回路,否则 G 包含了一个与两个不同的顶点 u 和 w 邻接的顶点 v。设 $G'=G-uv-vw+uw$。如果 G' 是连通的,那么 G 比 G' 的边多一条。根据归纳假设 G' 包含一个 Euler 回路 C'。在 C' 中用删去的边 uv 和 vw 代替边 uw 产生了 G 的一个 Euler 回路,从而可以假设 G' 是不连通的。那么 G' 恰好包含两个分支,一个分支 G_1 包含 u 和 w,而另一个分支(可能是平凡的)G_2 包含 v。根据归纳假设 G_1 和 G_2 分别包含一个 Euler 回路和 C_1 和 C_2。如果 G_2 是平凡的,那么用边 uv 和 vw 代替 C_1 的边 uw 即可得到 G 的一个 Euler 回路。如果 G_2 是非平凡的,那么 G 的一个 Euler 回路 C 可以按照如下规则构造:用边 uv 和 vw 代替 C_1 的边 uw;由于回路 C_2 一定通过顶点 v,从而可在 v 处插入回路 C_2。■

下面给出包含一条 Euler 迹的图的特征刻画(定理 4.2)。由于这个结果和接下去的两个结果对多重图也是成立的,因此由定理 4.1 和定理 4.2 可得:图 4.2 的多重图既不包含一条 Euler 迹也不包含一条 Euler 回路。

定理 4.2(Euler) 设 G 是一个非平凡连通图(或多重图),那么 G 包含一条 Euler 迹当且仅当 G 恰好有两个奇顶点,而且这条迹的起点和终点分别为这两个奇顶点。

证明 由于一般连通图是连通多重图的特例,因此只对连通多重图进行

证明。如果G包含一条Euler $u—v$迹，那么就象定理4.1的证明那样，不同于u和v的每一个顶点都是偶顶点，且u和v为奇顶点。

反过来，设G是一个恰好有两个奇顶点u和v的连通多重图。在顶点u和v之间增加一条边e得到图H，由于H的每一个顶点都是偶顶点，所以H是Euler图，从H的任意一个Euler回路中删去边e，就得到了G的一条Euler $u—v$迹。■

当然定理4.2的Euler迹有偶长还是奇长取决于G有偶数条边还是奇数条边。定理4.2能被得到如下推广。

定理4.3 设G是有$2n(n \geq 1)$个奇顶点的连通图(或多重图)，那么$E(G)$能划分为n个不交子集$E_i(1 \leq i \leq n)$的并，使得对任意$1 \leq i \leq n$，$\langle E_i \rangle$是连接两个奇顶点的一条迹，并且在这些迹中至多有一条是奇长迹。

证明 首先，证明$E(G)$能划分为n个不交子集$E_i(1 \leq i \leq n)$的并使得：对于任意$1 \leq i \leq n$，$T_i = \langle E_i \rangle$是连接两个奇顶点的一条迹。

设H是在G中加入一个新顶点x，并把G的每一个奇顶点与x连接所得的图，由于H的每一个顶点都是偶顶点，图H是Euler图，从而包含一条Euler回路C。从C中删去新顶点x以及与x关联的边，就得到连接G中奇顶点u_i和v_i的迹$T_i(1 \leq i \leq n)$使得G中的每一条边恰好落在唯一的一条迹上。显然，所有的$u_i—v_i$迹$T_i(1 \leq i \leq n)$是非平凡迹，且$E_i = E(T_i)(1 \leq i \leq n)$为$E(G)$满足条件的划分。

下面证明可以使得所有$u_i—v_i$迹$T_i(1 \leq i \leq n)$中至多有一条是奇长迹。

如果$T_i(1 \leq i \leq n)$中奇长迹的条数不超过1，则定理结论成立。

如果$T_i(1 \leq i \leq n)$中至少存在两条奇长迹T_s和T_t使得：T_s和T_t包含公共点w，则令A_s表示T_s的$u_s—w$子迹，B_s表示T_s中剩下的$w—v_s$子迹；同样设A_t表示一条T_t的$u_t—w$子迹，而B_t表示T_t的$w—v_t$子迹。显然A_s和B_s具有不同奇偶性，A_t和B_t也有不同的奇偶性，从而A_s可以与A_t或B_t之一配对构成一条偶长迹T_s'，而B_s和不在T_s'上的子迹A_t或B_t配对也形成一条偶长迹T_t'。利用迹T_s'和T_t'代替迹T_s和T_t使得迹族$\{T_i \mid 1 \leq i \leq n\}$中奇长迹的条数减少2。反复进行这一过程，直到迹族$\{T_i \mid 1 \leq i \leq n\}$中任意两条奇长迹不含公共点。如果此时迹族$\{T_i \mid 1 \leq i \leq n\}$中奇长迹的条数不超过1，则定理结论成立。

如果迹族$\{T_i \mid 1 \leq i \leq n\}$中存在两条奇长迹$T_s$和$T_t$使得：$T_s$和$T_t$不包含公共点。称$d(T_i,T_j) = \min\{d(u,v) \mid u \in V(T_i), v \in V(T_j)\}$为迹$T_i$和$T_j$之间的距离。选取迹族$\{T_i \mid 1 \leq i \leq n\}$中两条奇长迹$T_s$和$T_t$使得$d(T_s,T_t) = \min\{d(T_i,T_j) \mid T_i$和$T_j$为奇长迹$\}$，则存在$w_s \in V(T_s)$，$w_t \in V(T_t)$使得：

$d(T_s,T_t)=d_G(w_s,w_t)$。不妨设 P 为 G 中的最短 $w_s—w_t$ 路，且 $w_tw\in E(P)$。存在迹族 $\{T_i|1\leq i\leq n\}$ 中的迹 T_r 满足 $w_tw\in E(T_r)$，由于 T_s 和 T_t 的取法中可得 T_r 为偶长迹。设 A_r 是 T_r 的 $u_r—w_t$ 子迹，B_r 是 T_r 的 $w_t—v_r$ 子迹。不失一般性，假设 B_r 包含边 w_tw。设 A_t 是 T_t 的 $u_t—w_t$ 子迹，B_t 是 T_t 的 $w_t—v_t$ 子迹。由于 A_r 和 B_r 的长具有相同奇偶性，而 A_t 和 B_t 的长具有不同奇偶性，所以或者 A_t 和 B_r 的长有不同奇偶性，或者 B_t 和 B_r 长有不同的奇偶性。不妨设 A_t 和 B_r 长有不同奇偶性。令 T_t' 是 A_t 和 B_r 合并构成的迹；T_r' 是 B_t 和 A_r 合并构成的迹，故迹 T_t' 有奇长且 $d(T_t',T_s)<d(T_t,T_s)$。利用 T_t' 和 T_r' 分别代替迹族 $\{T_i|1\leq i\leq n\}$ 中的迹 T_t 和 T_r。反复进行这一过程直到 T_t 和 T_s 有公共点，再利用对于有公共点奇长迹的讨论可知，能够使得迹族 $\{T_i|1\leq i\leq n\}$ 中奇长迹的条数减少 2。

从而在任何情况下，都可以将迹族 $\{T_i|1\leq i\leq n\}$ 中奇长迹的条数减小 2。反复进行这一过程直到迹族 $\{T_i|1\leq i\leq n\}$ 中奇长迹的条数不超过 1。定理结论成立。■

从 1736 年开始，在对 Euler 图的研究已经进行了近两个半世纪的 1973 年，Toida 发现：包含 Euler 图中任何一条边的圈的个数是奇数，1984 年 Mckee 又证明了这个条件是充分的。下面给出这个本质上完全不同的 Euler 图的刻画，同时也给出充分性的另外一种证明方式。

定理 4.4 一个非平凡连通图(或多重图)G 是 Euler 图当且仅当 G 的每一条边落在奇数个圈上。

证明 设 G 是一个 Euler 图并设 $e=uv$ 是 G 的一条边，那么 $G'=G-e$ 是连通的。设 M 为 G' 中所有顶点 u 恰好只出现一次的不同 $u—v$ 迹构成的集合。首先证明：$|M|$ 为奇数。

由顶点 v 出发，有奇数条边可以作为迹的始边。一旦始边被确定，那么这条迹就要继续到下一个顶点 w。由于与 w 关联且不同于 vw 的边数为奇数，所以迹的第二条边有奇数种选择。继续这一过程，直到迹的另一个端点为 u。在这一条迹的不同于 u 的每一个顶点上，对于这条边继续有奇数条边可用，所以有奇数条这样的迹。

假设 T_1 是一条只包含 u 恰好一次的一条 $u—v$ 迹，但不是一条 $u—v$ 路，那么某个顶点 $v_1(\neq u)$ 在 T_1 上至少出现两次，这意味着 T_1 包含一条 $v_1—v_1$ 闭迹 $C:v_1v_2\cdots v_nv_1$，所以存在一条恒等于 T_1 的 $u—v$ 迹 T_2，除了用"逆向"闭迹 C'：$v_1v_nv_{n-1}\cdots v_2v_1$ 代替 C 以外。这意味着不是 $u—v$ 路的 $u—v$ 迹是成对出现的，因此存在偶数条不是 $u—v$ 路的 $u—v$ 迹，从而在 $G-e$ 中存在奇数条 $u—v$ 路，这就意味着有奇数个包含 e 的圈。

反过来，只要证明 G 中每个顶点都是偶顶点。对 G 的任意顶点 v，设 $e_1, e_2, \cdots, e_k$ 是与 v 关联的所有边。构造一个新的多重图 H 如下：顶点集 $V(H) = \{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$，$H$ 中两个顶点 u_i 和 u_j 之间连接 m 条边当且仅当 G 中存在同时包含边 e_i 和 e_j 的 m 个不同的圈且不存在同时包含边 e_i 和 e_j 的 $m+1$ 个不同的圈。因为与 v 关联的每条边 $e_1, e_2 \cdots, e_k$ 落在奇数个圈上，故 H 中相应的每个顶点 $u_1, u_2, \cdots, u_k$ 都是奇度顶点，从而 $|V(H)| = k$ 必须是偶数，即 v 是偶顶点。■

举办展览会时，把展览走廊的平面布置成一个图：走廊对应于图的边，而若干走廊交汇的地方看成图的顶点。当所对应的图是 Euler 图时，观众就可以从入口出发，通过每条走廊正好一次，最后返回到入口(同时也正好是出口)的地方。为使每条走廊恰好经过一次，而又返回原来的入口处，那么必须在展厅走廊对应的 Euler 图中走出的路线恰好是 Euler 回路，这就得按一定的规则行进，随便走是不行的。下面给出在 Euler 图中找一条 Euler 回路的一个好算法。

算法 4A(Fleury) 已知一个 Euler 图 G：

第一步　选择 G 的任意一个顶点 v_0，并定义迹 $T_0 = v_0$。

第二步　如果已经得到迹 $T_i: v_0e_1v_1e_2\cdots e_iv_i$，从 $E(G) - \{e_j | 1 \le j \le i\}$ 中选择一条边 e_{i+1}，且符合下列条件：

(a) e_{i+1} 与 v_i 关联；

(b) 除非没有其它边可供选择，e_{i+1} 不是图 $G_i = G - \{e_j | 1 \le j \le i\}$ 的桥。

如果没有这种边 e_{i+1} 存在，则停止。

第三步　定义 $T_{i+1} = v_0e_1v_1e_2\cdots e_{i+1}v_{i+1}$，其中 $e_{i+1} = v_iv_{i+1}$。

第四步　用 $i+1$ 代替 i 并转到第二步。

练习

1. 今天 Königsberg 又多了两座桥，在区域 B 和 C 之间以及区域 B 和 D 之间各建了一座新桥，有可能找到通过 Königsberg 全部桥而不重复任何一座桥的路吗？

2. 非平凡连通图 G 是 Euler 图当且仅当 $E(G)$ 能划分为不交子集 $E_i(1 \le i \le n)$ 的并，且对任意 $1 \le i \le n$，$\langle E_i \rangle$ 是 G 的一个圈。

3. 设 G 是有 $2n(n \ge 1)$ 个奇顶点的连通图，证明：如果 $m < n$，那么 $E(G)$ 不可能划分为不交子集 $E_i(1 \le i \le m)$ 的并，使得对于任意 $1 \le i \le m$，$\langle E_i \rangle$ 是一条开迹。

4. 给出在一个包含一条 Euler 迹的图中求出一条 Euler 迹的算法。

5. 图 G 是从顶点 v 随机 Euler 图，如果以 v 作为始点的每条迹都能被延拓成 G 的一条 Euler $v—v$ 回路。给出不能从任何顶点，从一个、两个或全部顶点随机 Euler 的 Euler 图例子。

6. 证明：Euler 图 G 是从顶点 v 随机 Euler 的当且仅当 G 的每个圈包含顶点 v。

7. 证明：如果 G 是从顶点 v 随机 Euler 的，那么 $\Delta(G) = \deg(v)$，其中 $\Delta(G) = \max\{\deg(u) \mid u \in V(G)\}$ 称为 G 的最大度。

8. 设 G 是阶 $p(p \geq 3)$Euler 图。证明：G 从任何顶点都不是随机 Euler 的或者恰好从一个、两个或它的全部顶点是随机 Euler 的。

9. 设图 G 是从顶点 v 随机 Euler 的。证明：如果 $\deg(u) = \Delta(G)$，$u \neq v$，那么 G 是从 u 随机 Euler 的。

10. 设 H 和 G 为两个图，如果存在 $V(H)$ 到 $E(G)$ 的一一映射 f 满足：对于任意 $u,v \in V(H)$，$uv \in E(H)$ 的充要条件为 $f(u)$ 和 $f(v)$ 是 G 中两条邻接边，则称 H 是 G 的线图，记为 $H = L(G)$。证明：Euler 图的线图 $L(G)$ 是 Euler 图。又若 $L(G)$ 是 Euler 图，问 G 是否一定为 Euler 图？

11. 是否存在 p 为偶数，且 q 为奇数的 (p,q)Euler 图？如果不存在这样的图，给出理由；如果存在这样的图，给出实例。

4.2 Hamilton 图

一个图 G 称为 Hamilton 图，如果它有一个包含 G 的全部顶点的圈。“Hamilton”这个名称来自著名的爱尔兰数学家 William Rowan Hamilton 爵士。然而，奇怪的是 Hamilton 与以他的名字命名的图不是严格数学上的关系。1857 年，Hamilton 制造了一种玩具，它是由一个木制的正十二面体，插在十二面体的每个角上的二十个钉子和一条足够长的线组成，且每个角上标着世界上一个重要城市的名称。游戏的目的是沿十二面体的棱找出一条路，通过每个城市恰好一次，最后回到路开始的那个城市。为了使游玩者能够对他已经访问过的城市进行标志，线就用来依次连结相应的钉子。使用十二面体相当不便，所以 Hamilton 又设计了这个游戏的一个“平面图”表示方法（见图 4.4）。此外，没有再提供使这个游戏成功的任何其它说明。

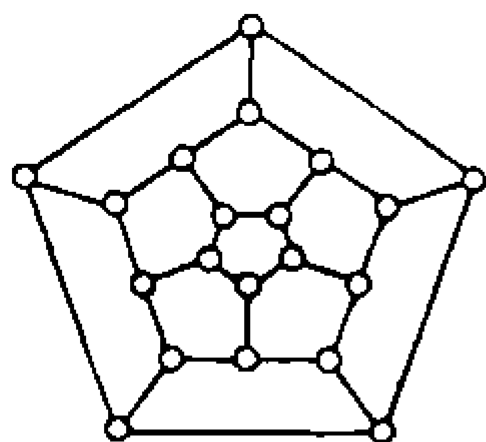


图 4.4 十二面体图

Hamilton 游戏的目的可以用图论术语来描述为：确定十二面体的这个图

是否存在一条包含它的每个顶点的圈。我们的“Hamilton”术语就是由此而来的。

有趣的是在 1885 年，也就是 Hamilton 发明他的游戏二年以前，英国数学家 Thomas P. Kirkman 在呈送皇家协会一篇论文中提出了下面的问题：一个给定的多面体图中，人们能否总能找到一个圈，它通过每个顶点一次且恰好一次。因此 Kirkman 显然开始了对“Hamilton”图的一般研究，但 Hamilton 游戏引起了人们对这个问题的兴趣。

如果图 G 的一个圈包含了图 G 的所有顶点，则这个圈就称为 G 的 Hamilton 圈。因此，一个 Hamilton 图是一个具有 Hamilton 圈的图。由于 Euler 图和 Hamilton 图在定义上类似性，特别是由于 Euler 图存在简单的特征刻画，人们自然希望对于 Hamilton 图也有一个类似的判定定理。然而，情况却并非如此，事实上为了求得 Hamilton 图的一个恰当的特征刻画正是图论中未解决的重要课题之一。

在对 Hamilton 图的研究过程中，人们已经得到了若干充分性条件，在这一节里，研究其中几个重要的充分性条件。

定理 4.5(Ore) 如果 G 是一个 $p(p \geq 3)$ 阶图，且对所有不同非邻接顶点 u 和 v，

$$\deg(u) + \deg(v) \geq p,$$

则 G 是 Hamilton 图。

证明 假设定理不成立。故存在一个阶为 $p(p \geq 3)$，满足定理条件且边数最多的非 Hamilton 图，即 G 是一个非 Hamilton 图且对 G 的任何两个非邻接顶点 w_1 和 w_2，图 $G + w_1w_2$ 是 Hamilton 图。因为 $p \geq 3$，所以 G 不是完全图。

设 u 和 v 是 G 的两个不邻接顶点。因此 $G + uv$ 是 Hamilton 的且 $G + uv$ 的 Hamilton 圈一定包含边 uv。由此可得：在 G 中，存在一条 u—v 路 $P = u_1u_2\cdots u_p(u = u_1, v = u_p)$ 包含 G 中每个顶点。

如果 $u_1u_i \in E(G)$ $(2 \leq i \leq p)$，那么 $u_{i-1}u_p \notin E(G)$，否则，$u_1u_iu_{i+1}\cdots u_pu_{i-1}u_{i-2}\cdots u_1$ 是 G 的一个 Hamilton 圈，所以，对 $\{u_2, u_3\cdots, u_{p-1}\}$ 中每一个邻接到 u_1 的顶点存在一个 $\{u_1, u_2\cdots, u_{p-1}\}$ 中与 u_p 不邻接的顶点，因此 $\deg(u_p) \leq (p-1) - \deg(u_1)$，从而

$$\deg(u) + \deg(v) \leq p - 1,$$

与定理的条件矛盾，所以 G 是 Hamilton 图。■

如果 G 是 Hamilton 图，则显然图 $G + uv$ 也是 Hamilton 图，这里 u 和 v 是不同的不邻接顶点。反过来，假设 G 是一个 p 阶图，u 和 v 是不邻接顶点，$G + uv$ 是 Hamilton 图且 $\deg(u) + \deg(v) \geq p$，如果 G 不是 Hamilton 的，那么就

像定理 4.5 证明中那样，可以得到矛盾 $\deg(u)+\deg(v)\le p-1$，所以 G 是 Hamilton 图。由此得到下面结果，这个结果首先被 Bondy 和 Chvátal 发现。

定理 4.6 设 u 和 v 是 p 阶图 G 的不同非邻接顶点且

$$\deg(u)+\deg(v)\ge p,$$

那么 $G+uv$ 是 Hamilton 图当且仅当 G 是 Hamilton 的。

定理 4.6 暗示了图的一个新概念，即图的闭包。设 G 为 p 阶图，如果从 G 开始，任选 G 中的两个非邻接顶点 u 和 v 满足 $\deg(u)+\deg(v)\ge p$，则在 G 中加上边 uv。对 $G+uv$ 再进行这个过程直到最后的图中任意两个非邻接顶点的度之和小于 p，则最后得到的图称为 G 的闭包，记为 $C(G)$。图 4.5 说明了闭包的构造过程。下面的定理说明了图的闭包 $C(G)$ 是唯一确定的。

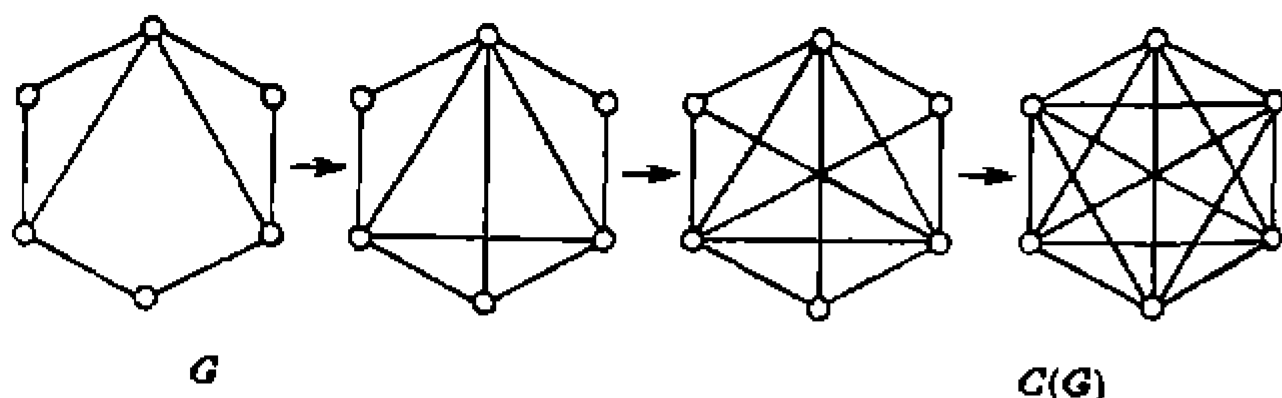


图 4.5 闭包程序

定理 4.7 如果 G_1 和 G_2 是从 p 阶图 G 中通过逐次连接度之和至少为 p 的非邻接顶点对得到的两个图，则 $G_1=G_2$。

证明 设 $e_1,e_2,\cdots,e_j$ 和 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 分别是为了得到 G_1 和 G_2 加到 G 的边序列。只要证明每条边 e_i 是 $G_2(1\le i\le j)$ 的一条边，且每条边 $f_i(1\le i\le k)$ 是 G_1 的一条边即可。假设上述结论不成立，则存在 $1\le m=\min\{i\mid e_i\notin E(G_2)$ 或 $f_i\notin E(G_1)\}$。不失一般性，假设边 $e_m=uv\notin E(G_2)$。令 $H=G+\{e_i\mid 1\le i<m\}$。由 m 的取法可知对于任意 $1\le i<m$，$e_i\in E(G_2)$。所以 $H\subseteq G_2$。由 u 和 v 是 H 中两个非邻接顶点及 $e_m\in E(G_1)$ 可得：

$$\deg_{G_2}(u)+\deg_{G_2}(v)\ge\deg_H(u)+\deg_H(v)\ge p.$$

与 G_2 的构造法则矛盾。■

下面的定理是闭包定义和定理 4.6 的一个简单推论。

定理 4.8 一个图是 Hamilton 图当且仅当它的闭包是 Hamilton 图。

因为至少有三个顶点的完全图是 Hamilton 图，由此得到一个图是 Hamilton 图的又一个充分条件。

定理 4.9(Bondy 和 Chvátal) 设 G 是阶至少为 3 的图，如果 $C(G)$ 是完全图，那么 G 是 Hamilton 图。

按照定理4.8，如果一个图G的闭包是Hamilton图，那么G也是Hamilton图。下面给出由一个已知的$C(G)$的Hamilton圈如何确定G的一个Hamilton圈的好算法(由Bondy和Chvátal提出)。如果$C(G)$是一个完全图，那么找$C(G)$的Hamilton圈是方便的。这个算法的关键步骤是下列修改过程。

假设C是阶$p(p\geq 4)$的某个图H的一个Hamilton圈且e是C的一条边，重新标号H的顶点使得$C=v_1v_2\cdots v_pv_1$且$e=v_1v_p$。如果存在一个整数$i(3\leq i\leq p-1)$使得$v_1v_i, v_{i-1}v_p\in E(H)$，那么$C'=v_1v_2\cdots v_{i-1}v_pv_{p-1}\cdots v_iv_1$是$H$的又一个Hamilton圈且$E(C')=(E(C)\backslash\{v_1v_p, v_{i-1}v_i\})\cup\{v_1v_i, v_{i-1}v_p\}$。此时称$v_1v_i$和$v_{i-1}v_p$是关于$(C,e)$的修改边，并且$C'$是$C$经过$(v_1v_p, v_1v_i, v_{i-1}v_p)$修改$C$后得到的。

在下面的算法中，假设在构造$C(G)$的过程中，G的每条边e标号为$l(e)=1$，且如果f是加到G上的第k条边，那么f标号为$l(f)=k+1$(当然，这种标号不是唯一的)。

算法 4B(Bondy 和 Chvátal) 给定一个图G的(边标定)闭包$C(G)$和$C(G)$的一个Hamilton圈C。

第一步 取$m=\max_{e\in E(C)}l(e)$。

如果$m=1$，则停止；

否则，设e是标号为m的唯一的一条C中的边，然后转入第二步。

第二步 选择$C(G)$中的边e_1和e_2满足：

(a)$l(e_1), l(e_2)<m$；

(b)e_1, e_2是关于(C,e)的修改边。

第三步 经过(e,e_1,e_2)修改C得到圈C'。

第四步 用C'代替C，返回第一步。

下面证明算法4B结束时，得到一个G的Hamilton圈。

首先证明第二步总能完成。设$p=p(G)$，重新标号$C(G)$的顶点使得$C=v_1v_2\cdots v_pv_1$且$e=v_1v_p$。设H表示$C(G)$的由边集$E(G)\cup\{f\in E(C(G))\mid l(f)<m\}$导出的生成子图，那么$C-e$是$H$的一个子图且由$C(G)$构成的方式可得

$$\deg_H(v_1)+\deg_H(v_p)\geq p,$$

故(类似于定理4.5的证明)存在一个整数$i(3\leq i\leq p-1)$使得$e_1=v_1v_i$和$e_2=v_{i-1}v_p$是H的边，即e_1和e_2是关于(C,e)的修改边且$l(e_1), l(e_2)<m$。

我们注意到：因为第一步每重复一次，对应的m的值至少减少1，所以这个算法实际上当$m=1$时结束，即G有一个Hamilton圈C。

如果一个图G满足定理4.5的条件，那么$C(G)$是一个完全图，从而根据

定理 4.9，G 是 Hamilton 图。因此，Ore 定理是定理 4.9 的一个直接推论（虽然 Bondy 和 Chvátal 的定理按发表时间来说要推后了几年），但在 Bondy-Chvátal 的结果之前发现。关于一个图是 Hamilton 图的充分条件在文献中已出现了许多，这些充分条件都能从定理 4.9 中导出（当然是定理 4.9 的推论）。在此，给出这些充分条件中最著名的一个（由 Pósa 给出），同时给出的证明与定理 4.9 无关，希望能给读者提供一种更好的证明技巧，这种证明技巧在图论领域中是很典型的。

定理 4.10（Pósa） 如果 G 是一个阶 $p(p \geq 3)$ 的图且对任意整数 $j(1 \leq j \leq p/2)$，度不超过 j 的顶点个数比 j 小，则 G 是 Hamilton 的。

证明 假设定理不成立，那么存在一个满足定理条件且边数最多的非 Hamilton 图 G。因为 $p \geq 3$，所以 G 不是完全图。

在 G 的全部非邻接顶点对中，设 v_1 和 v_p 是两个非邻接顶点使得 $\deg(v_1)+\deg(v_p)$ 是最大的。不妨设 $\deg(v_1) \leq \deg(v_p)$。由 G 的定义可得图 $G+v_1v_p$ 是 Hamilton 图，且 $G+v_1v_p$ 的每个 Hamilton 圈包含边 v_1v_p。这意味着顶点 v_1 和 v_p 是 G 中包含 G 的每个顶点的一条路 $P=v_1v_2\cdots v_p$ 的端点。如果一个顶点 $v_i(2 \leq i \leq p)$ 邻接到 v_1，那么 v_{i-1} 不邻接到 v_p，否则，$v_1v_iv_{i-1}\cdots v_pv_{i-1}v_{i-2}\cdots v_1$ 是 G 的一个 Hamilton 圈，因此对每一个与 v_1 邻接的顶点 $v_i(2 \leq i \leq p)$，一定存在一个不邻接到 v_p 的顶点 v_{i-1}，从而在 G 中至少存在 $\deg(v_1)$ 个顶点不与 v_p 邻接。换句话说，至多存在 $p-1-\deg(v_1)$ 个顶点邻接到 v_p，即

$$\deg(v_1) \leq \deg(v_p) \leq p-1-\deg(v_1),$$

故 $\deg(v_1) \leq (p-1)/2$。由 v_1 和 v_p 选择方法可得，对于不与 v_p 邻接的任意一个顶点 v，$\deg(v) \leq \deg(v_1)$。因此，至少存在 $\deg(v_1)$ 个顶点有度不超过 $\deg(v_1)$。根据定理条件对于 $1 \leq \deg(v_1) < p/2$，度不超过 $\deg(v_1)$ 的顶点个数小于 $\deg(v_1)$，矛盾。■

也许最简单的充分条件应归于 Dirac，这个结果是定理 4.5，4.9 和 4.10 的推论。

推论 4.10（Dirac） 如果 G 是一个 $p(p \geq 3)$ 阶图使得对 G 的每个顶点 v，都有 $\deg(v) \geq p/2$，则 G 是 Hamilton 的。

按照 Dirac 的结果，如果一个图 G 的阶 $p \geq 3$ 且满足 $\delta(G) \geq p/2$，那么 G 是 Hamilton 的，即 G 包含一个长 $p=2\cdot(p/2)$ 的圈。Dirac 已经证明了如果 G 是阶 $p(p \geq 2d)$ 且 $\delta(G) \geq d > 1$ 的一个 2- 连通图，那么 G 包含一个长至少为 $2d$ 的圈。这个结果能被用来得到 Nash-Williams 的结果：每个阶为 $2r+1$ 的 r- 正则图是 Hamilton 的。注意：Nash-Williams 的结果不是以前的充分条件的推论，因为所有以前的充分条件都要求 G 中存在度至少为 $p/2$ 的顶点。采用同

样思想，Jackson 已经证明了任意一个阶至多是 $3r$ 的 2-连通 r-正则的图是 Hamilton 的。关于一个图是 Hamilton 的，已经给出了与图的顶点度有关的若干充分条件。为了给出一个本质不同的结果，需要图的独立数概念(这个概念将在第六章作详细介绍)。图G的一个顶点独立集是G的一个非空顶点子集且子集中的任意两个顶点是不邻接的。G 的独立数 $\beta(G) = \max\{|M| \mid M \subseteq V(G), M$ 是 G 的顶点独立集$\}$ 且满足 $|M| = \beta(G)$ 的顶点独立集称为 G 的最大顶点独立集。由 Chvátal 和 Erdös 给出的结果涉及图 G 的独立数 $\beta(G)$ 和连通度 $\kappa(G)$。

定理 4.11 设 G 是阶 $p(p \geq 3)$ 的图。如果 $\kappa(G) \geq \beta(G)$，则 G 是 Hamilton 的。

证明 如果 $\beta(G) = 1$，则 G 是完全图，这个结果是显然的。假设 $\beta(G) \geq 2$ 且 $\kappa(G) = n$。因为 $n \geq 2$，所以 G 至少包含一个圈。在 G 的全部圈中，设 C 是最长的一个圈。由定理 2.17，在 C 上至少有 n 个顶点。

下面证明：C 是 G 的 Hamilton 圈。假设 C 不是 G 的 Hamilton 圈，则至少存在 G 的一个顶点 w 不落在 C 上。因为 $|V(C)| \geq n$，由定理 2.16 得到：在 w 和 $V(C)$ 之间存在 n 条内不交路 $P_i(1 \leq i \leq n)$，$V(C) \cap V(P_i) = \{v_i\}(1 \leq i \leq n)$ 且 $v_i \neq v_j(1 \leq i < j \leq n)$。不妨设顶点 $v_1, v_2, \cdots v_n$ 在 C 依次出现。对于任意 $1 \leq i \leq n$，选取 u_i 满足：$v_iu_i \in E(C)$，且 u_i 属于 C 上不包含 $v_j(j \neq i, i+1)$ 的 v_i—v_{i+1} 路。注意到对任意 $1 \leq i \leq n$，$wu_i \notin E(G)$，否则我们用确定的 v_i—u_i 路代替 C 中边 v_iu_i 得到了一个长至少为 $|V(C)| + 1$ 的圈，与 C 为 G 的最长圈矛盾。令 $S = \{w, u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，因为 $|S| = n + 1 > \beta(G)$ 且 $wu_i \notin E(G)(1 \leq i \leq n)$，所以存在整数 $1 \leq j < k \leq n$ 使得 $u_ju_k \in E(G)$。因此，$E' = (E(C) - \{v_ju_j, v_ku_k\}) \cup E(P_j) \cup E(P_k) \cup \{u_ju_k\}$ 导出 G 的一个圈 C'，且 C' 的长大于 C 的长，与 C 的取法矛盾，从而 C 是 G 的一个 Hamilton 圈。■

正像已经指出的那样，寻求 Hamilton 图适当的特征刻画仍然是图论中未解决的问题。上面讨论的都是 Hamilton 图的充分条件。下面给出一个简单而有用的必要条件来结束这一节。

定理 4.12 若G是一个 Hamilton 图，则对于 $V(G)$ 的每个非空真子集 S，

$$k(G - S) \leq |S|.$$

这里 $k(G - S)$ 表示 $G - S$ 的分支数。

证明 设C是G的一个 Hamilton 圈，则对于 $V(G)$ 的任意一个非空真子集 S，均成立 $k(C - S) \leq |S|$。由于 $C - S$ 是 $G - S$ 的一个生成子图，因而 $k(G - S) \leq k(C - S)$，于是 $k(G - S) \leq |S|$。■

应用这个定理，有时可以证明一个给定的图是非 Hamilton 图。例如可以

判断图 4.6 不是 Hamilton 图。但这种方法并不总是有效的。如 Petersen 图(图 4.7) 是非 Hamilton 图，但条件 $k(G-S)\leq |S|$ 却是满足的。

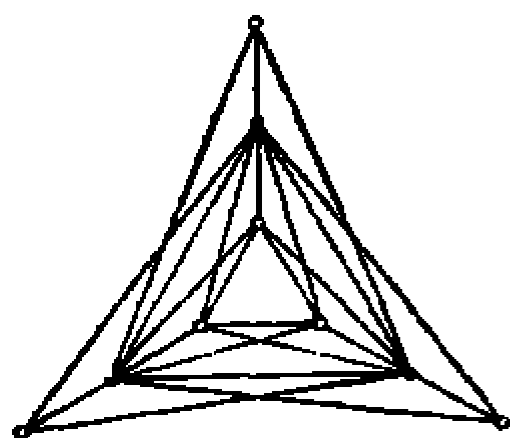


图 4.6

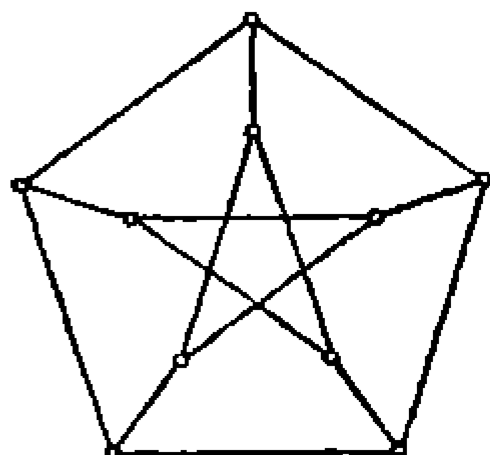
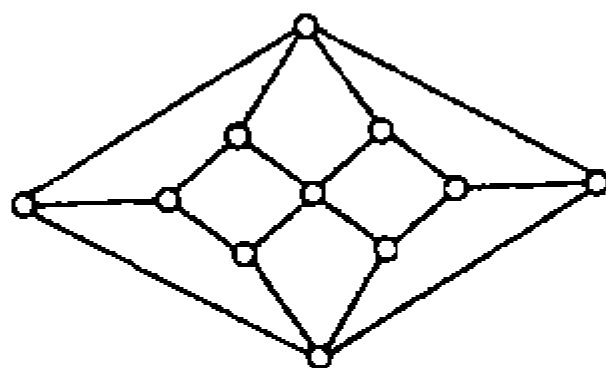


图 4.7

练习

1. 确定 Herschel 图是非 Hamilton 的。

2. 证明：若 (a)G 不是 2- 连通图；或者 (b)G 是二部图，并且它的顶点分划 (X,Y) 满足 $|X|\neq|Y|$，则 G 是非 Hamilton 的。



Herschel 图

3. 一只老鼠吃 $3\times3\times3$ 的乳酪，其方法是通过打洞挖通所有 27 个 $1\times1\times1$ 的子立方体，如果它在一个角上开始，然后依次挖向未吃过的子立方体，试问它能在这个立方体的中心结束吗？

4. 能不能用 13 个 $1\times1\times2$ 的长方体堆成一个空心的 $3\times3\times3$ 的立方体？

5. 教室里有 5 排椅子，每排 5 张椅子，每张椅子上坐一名学生。如果一周后每个学生都必须与他相邻的某个同学(前后左右交换座位)，问应该怎样换？

6. 试述 Hamilton 图，一笔画和 Euler 图之间的关系。

7. 图 G 的一条路称为 Hamilton 路，如果这条路包含了 G 中每一个顶点。若 G 有一条 Hamilton 路，则对于 V 的每一个真子集 S 有 $k(G-S)\leq|S|+1$。证明：如果 G 有 Hamilton 路，则 G 的线图 $L(G)$ 也有 Hamilton 路。反过来是否成立？

4.3 中国邮递员问题和旅行售货员问题

邮递员进行邮件投递的过程为：在邮局分拣好需要投递的邮件后，到管辖的地段的每一条街道投递，最后，再返回邮局。对于这个问题，邮递员希望找出一条行走距离最短的路线。因为这个问题首先是中国数学家管梅谷教授(1962)研究的，所以该问题称为中国邮递员问题。可以利用图来模拟这个问题：图G的顶点对应于街道的交叉点和拐角；图的边对应于邮递员管辖地段的每条街道，边上的权就代表街道长度。那么中国邮递员问题的解就是在赋权连通图G中，求一条使用每一条边至少一次的长度最小的闭途径。如果G有两个或两个以上奇顶点，则求解的问题等价于为了得到一个 Euler 多重图，求需要重复的G的边并使这些边权之和最小。通过考虑全部可能奇顶点对，并且使顶点对之间的距离和最小就可得到这个问题的解。接下去就来详细讨论这个问题的解法。

如果对应的图G是 Euler 图，那么从对应于邮局的顶点出发的任何一条 Euler 回路都是符合上述要求的邮递员的最优投递路线。在这种情况下问题自然容易解决。如果连通图G不是Euler 图，那么G有偶数个奇顶点。对于任意两个奇顶点u和v，在G中必有一条路连接它们。将这条路上的每一条边改为二重边得到新图H，则u和v就变为H的偶顶点，在这条路上的其它点度数均增加 2，即奇偶性不变，于是H的奇顶点个数比G的奇顶点个数减少 2。对于H重复这个过程，经若干次后，可将G中所有奇顶点变成偶顶点，从而得到多重 Euler 图，这个 Euler 图的一条 Euler 回路就相应于中国邮递员问题的一个可行解，且 Euler 回路的长度等于G的所有边的长度加上每次连奇顶点对的路的长。但怎样才能使闭途径的长度最短呢？

定理 4.13 设W是赋权图G的一条包含G的所有边至少一次的闭途径，则W具有最小长度的充要条件是：

a. 每条边最多重复一次；

b. 在G的每个圈上，重复边的长度之和不超过这个圈长度的一半。

证明 首先，假设由G构造的 Euler 图中某一条边的重复次数为n($n \geq 2$)，那么将此边的重复次数减少 2 得到的图仍然是Euler 图，且新 Euler 图的权小于原 Euler 图的权。

其次，如果在一个圈上，把原来重复一次的边都改为不重复，而把原来不重复的边都改为重复 1 次，这样圈上每个顶点的度数改变为 0 或 2，因此不会改变原图是否为 Euler 图的性质。如果一个圈中重复边的长度超过圈长的一

半，那么作如上改变后重复边的长度之和减少，而 Euler 图的性质不变。

反过来，只要证明：满足定理条件(a)，(b) 的所有闭途径的长度都相等。因为这些闭途径要包含 G 的所有边，所以只要证明重复边的长度之和相等即可。

设 W_1 和 W_2 是两条满足条件(a) 和(b) 的闭途径，由于 W_1 和 W_2 可能有相同的重复边，为了比较它们中重复边的长度之和，只要比较 W_1 和 W_2 的不相同的重复边就可以了。记 W_1 和 W_2 中重复边的集合分别为 E_1 和 E_2，只要比较 $w(E_1 - E_2)$ 和 $w(E_2 - E_1)$。考虑由边集 $F = (E_1 - E_2) \cup (E_2 - E_1)$ 所导出的子图 $G' = \langle F \rangle$。

设 $v \in V(G)$，若 $\deg_G(v)$ 为奇数，则 E_1 和 E_2 中均有奇数条边与 v 关联(这是因为由 G 加入重复边后得到的图是 Euler 图，即每个顶点的度均为偶数)。若 $\deg_G(v)$ 为偶数，则 E_1 和 E_2 中与 v 关联的边数均为偶数。因此在任何情况下，E_1 和 E_2 中与 v 关联的边数奇偶性相同。设 E_1 和 E_2 分别有 y_1 和 y_2 条边与 v 关联，其中有 y_0 条边同时属于 E_1 和 E_2，则 F 中和 v 关联的边数为

$$(y_1 - y_0) + (y_2 - y_0) = y_1 + y_2 - 2y_0。$$

由于 y_1 和 y_2 奇偶性相同，所以 F 中与 v 关联的边数为偶数，即 G' 的每个连通分支是 Euler 图。由第 4.1 节练习 2，可以将 G' 分解成若干个圈，在每一个圈上，由条件(b)，属于 E_1 的边的长度之和与属于 E_2 的边的长度之和都不超过圈长的一半。又因为圈上的边或者属于 E_1 或者属于 E_2，因此每个圈上 $E_1 - E_2$ 和 $E_2 - E_1$ 的边的长度之和相同，故可知在 G' 中，$w(E_1 - E_2) = w(E_2 - E_1)$。于是 W_1 和 W_2 的重复边的长度之和相等，即 W_1 和 W_2 有相等长度。■

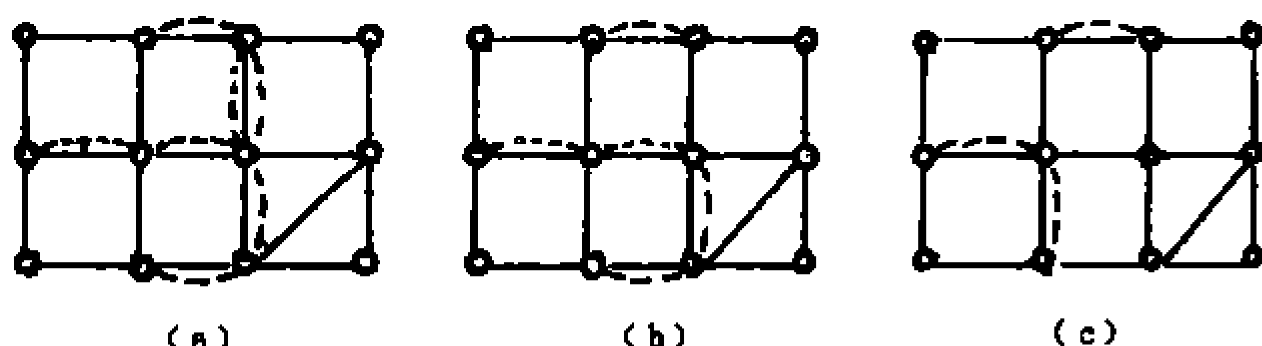


图 4.8

在上述定理必要性的证明中，实际上已经包含了最短闭途径的作法。对任意图 G，首先，把它的全部奇顶点两两配对，每对之间用重复边连接起来，使奇顶点变为偶顶点，这样 G 变为一个多重 Euler 图(如图 4.8(a))；其次，对所有重复次数不小于 2 的重边成对地删去，从而得到的图仍然为 Euler 图(图 4.8(b))；最后，对每一个圈分别检查重复边的长度之和是否超过圈长的一

半。如果超过，则把原来重复边改为不重复边，把不重复边改为重复边（图4.8(c)）。反复进行以上过程，直到不能进行为止，最后得到多重 Euler 图 H，则 H 的 Euler 回路就是 G 中包含每条边至少一次的最短闭途径。这种求最短投递路线的方法就叫作"奇偶点图上作业法"。

需要指出，由于这种方法要检查图中每一个圈，所以当圈中边数较多时，计算量将非常大。1973 年 Edmonds 和 Johnson 提出了一种更有效的算法。

下面我们介绍旅行售货员问题。

一个售货员要到若干有直通道路的城镇推销商品，然后回到出发地，问他应如何计划旅行路线，才能使得对每个城镇都能到达且只到达一次，而且使总的行程最短?这个问题就称为旅行售货员问题或者货郎担问题。用图论的术语来说，这一问题的目的是在一个赋权完全图中，找出一条最小权的 Hamilton 圈。直到目前为止，还没有求解这一问题的有效算法，所以人们希望找到一种简便易行又能获得相当好（但不必最优）的结果的方法。下面介绍一种可以称为逐次改进法的方法。

在赋权完全图 G 中首先找出一条 Hamilton 圈 C，然后适当修改 C 以便得到具有较小权的另一个 Hamilton 圈，修改方法如下：

设 $C = v_1v_2\cdots v_nv_1$，则对于所有满足 $1 < i+1 < j < n$ 的 i 和 j，我们得到一个新的 Hamilton 圈：

$$C_{ij} = v_1v_2\cdots v_iv_jv_{j-1}\cdots v_{i+1}v_{j+1}v_{j+2}\cdots v_nv_1,$$

C_{ij} 是在 C 中删去边 v_iv_{i+1} 和 v_jv_{j+1}，而添加边 v_iv_j 和 $v_{i+1}v_{j+1}$ 所得到的一个新的圈。如图 4.9 所示。

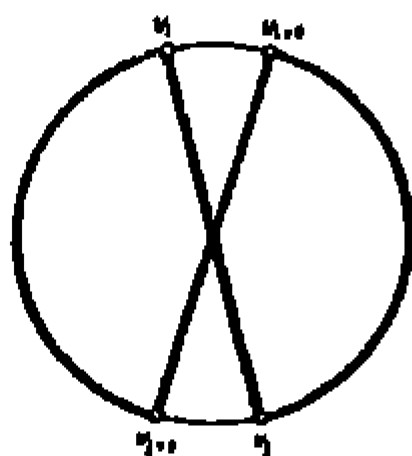


图 4.9

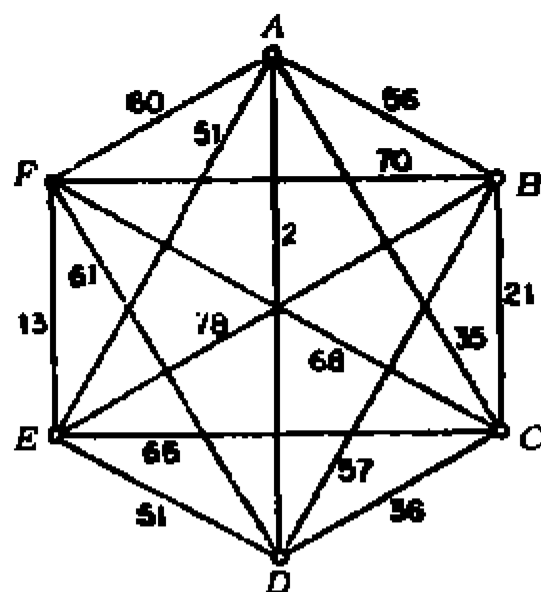


图 4.10

若对每一对 i 和 $j(1 < i+1 < j < n)$，有

$$w(v_iv_j)+w(v_{i+1}v_{j+1})<w(v_iv_{i+1})+w(v_jv_{j+1}),$$

则显见圈 C_{ij} 是在圈 C 的基础上的一个改进。

反复使用上述方法进行改进，直到得出一条用这种方法不能再进行改进的圈为止。当然，最后所得的圈不一定是最优的(即具有最小权的 Hamilton 圈)，但往往是一个相当好的近似结果。如果从不同的 Hamilton 圈开始进行上述程序，常常可以得到更好一些的结果。

例 在图 4.10 所示的赋权完全图中，找一条有充分小权的 Hamilton 圈。

最初的路线是 $ABCDEFA$ 权为 237。可以如图 4.11 所示进行三次修改，最终得到一条权为 192 的圈。

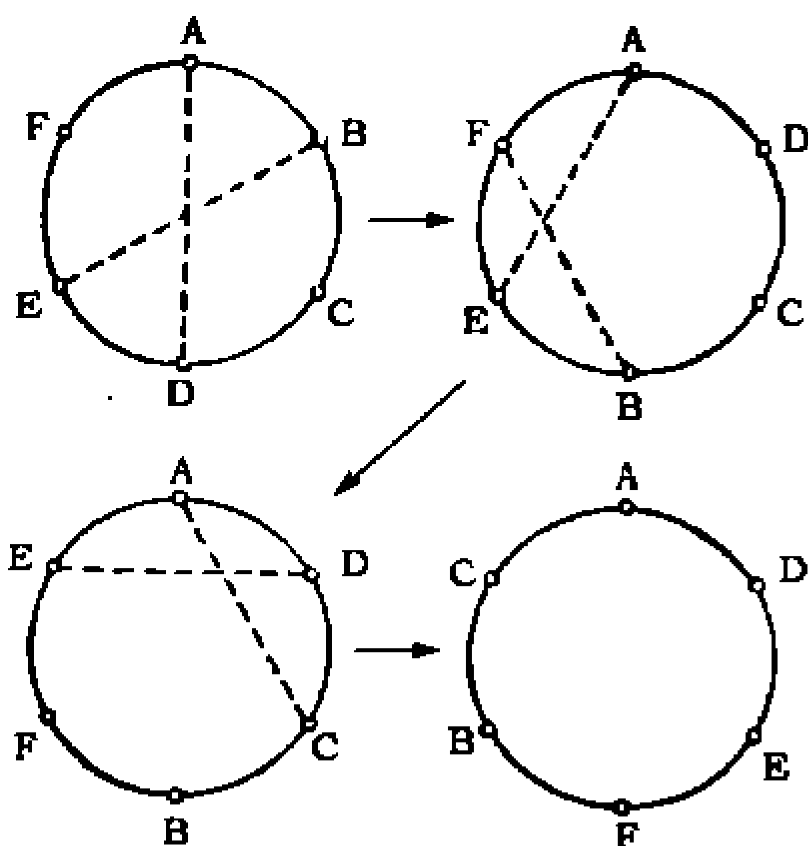


图 4.11

可以用 Kruskal 算法来衡量最后的解好到什么程度。假定 C 是 G 的一个最优 Hamilton 圈，那么对于任何顶点 v，$C-v$ 是 $G-v$ 的一个生成树，若 T 为 $G-v$ 的最优树，显然有

$$w(T)\le w(C-v)。$$

两端同时加上在 C 中与 v 关联的两条边 e 与 f 的权，则

$$w(T)+w(e)+w(f)\le w(C-v)+w(e)+w(f)=w(C)。$$

这就给出了 $w(C)$ 的一个下界。在上述例子中，取顶点 C 作为 v 点，可求得(图 4.12)

$$w(T_0)=122, w(e)=21 \text{ 且 } w(f)=35$$

因此可以得出结论，在图 4.10 中，一条最优 Hamilton 圈的权 $w(C)$ 满足

$$178\le w(C)\le 192。$$

寻求旅行售货员问题的相当好的解，还可以使用更为简便的近邻法，这个方法的步骤是：

1. 选一个顶点 v_0 作为始点，并寻找与 v_0 关联的一条权最小的边 v_0v_1。这样得到一条初始路 v_0v_1，然后按步骤 2 逐步扩充。

2. 设 v_i 是刚加到这条路上的一个顶点，在所有不在这条路上的顶点中，

选取一条与 v_i 关联的权最小的边 v_iv_{i+1}，并将边 v_iv_{i-1} 添加到这条路上，这样得到一条扩充路。重复这个步骤，直到 G 中所有顶点包含在路中为止。

3. 将最后加到路中的顶点 v_{p-1} 和 v_0 连接起来，这样就构成一个所要求的圈。

对上述算法，例中以 A 为始点可得到权为 193 的圈。

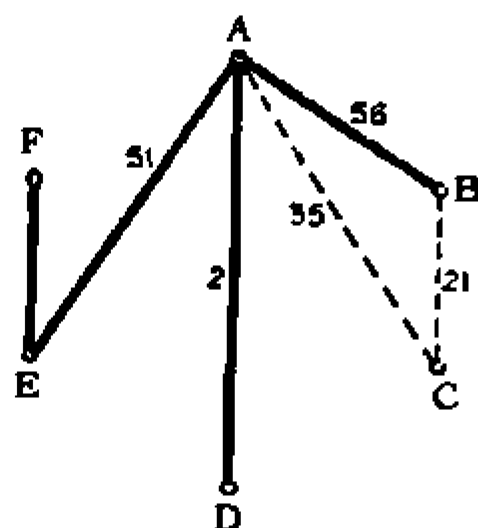
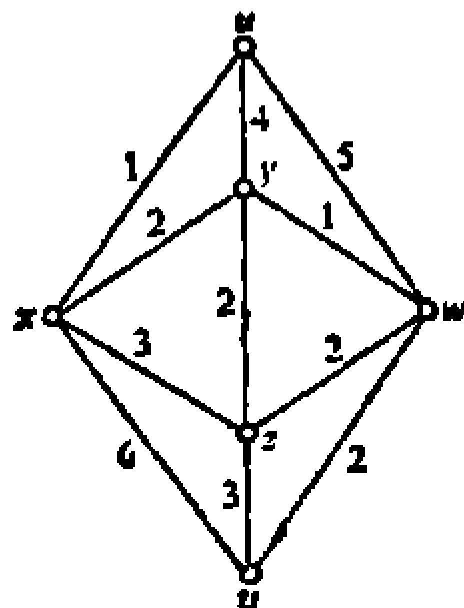


图 4.12

练习

1. 证明：在下图所示赋权图中 $xuywuzwyxuwuxzyx$ 是一条最优投递路线。



2. 设 G 是赋权完全图，$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_6\}$ 且它的边权由矩阵 $M=[m_{ij}]$ 给出，其中 $m_{ij}=w(v_iv_j)$。运用教材中介绍的算法求一个权尽可能小的 Hamilton 圈。

$$M=\begin{bmatrix}0&3&3&2&7&3\\3&0&3&4&5&5\\3&3&0&1&4&4\\2&4&1&0&5&5\\7&5&4&5&0&4\\3&5&4&5&4&0\end{bmatrix}$$

5　图的嵌入

图 G 能嵌入曲面 S，直观上是指 G 能在曲面 S 上画出来使边（对应于 G 中边的曲线）只在与它们相互关联的顶点相交（即对应于 G 的顶点的点）。这一章主要考虑曲面 S 为平面的情况下，能画出来的图，即"平面图"。在"平面图"的研究中，Euler 发现的一个公式起了关键作用。

5.1　Euler 公式

一个图 G 能嵌入曲面 S 更确切地可描述为：如果图 G 能在曲面 S 上画出来使得，G 的任意一个顶点对应 S 上的一个点；不同顶点对应的点也不同；任意一条边对应 S 上的一条连续且自身不相交的曲线；且任意两条边对应的曲线在除它们的公共端点对应的点以外也不相交，则称图 G 能嵌入曲面 S 或者称 G 在 S 上是可实现的。

如果一个图能嵌入平面，则称该图是可平面的或者为可平面图。一个图能在平面上嵌入等价于能在球面上嵌入。为了看清这一点，构造球面到平面的投影：设 S 是与平面 π 相切的球面，A 是过切点的直径的另一个端点。如果一个图 G 以某种方式嵌入球面 S，且 A 不与 G 的顶点对应也没有 G 的边通过 A，那么对于球面 S 上的任意一个顶点 $B(A \neq B)$，作 $\overline{AB}$ 的延长线交平面 π 于点 C，则称 C 为 B 在平面 π 上的投影，这样图 G 能够投影到平面 π，由此产生 G 在 π 上的一个嵌入。这个投影的逆过程也正好表明能嵌入平面的任何图也能在球面上嵌入。

如果一个可平面图被嵌入平面，那么嵌入平面后的图称为平面图。为了以后叙述方便，一般用 $\hat{G}$ 表示可平面图 G 的平面嵌入。图 5.1 中的图 $G_1 \cong K_{2,3}$ 是可平面图，尽管画的不是平面图；$G_2 \cong K_{2,3}$ 既是平面图也是可平面图；而图 $G_3 \cong K_{3,3}$ 是不可平面图，下面将给出这个断言的证明。

平面图最直接的应用是在电路的设计中，实际上印刷电路板和集成电路片基本上是可平面的。如果对应于印刷电路的图是可平面的，那么只要一块电路板就够了，否则为了避免短路，必须进行修改。例如在板上钻洞且在板的正

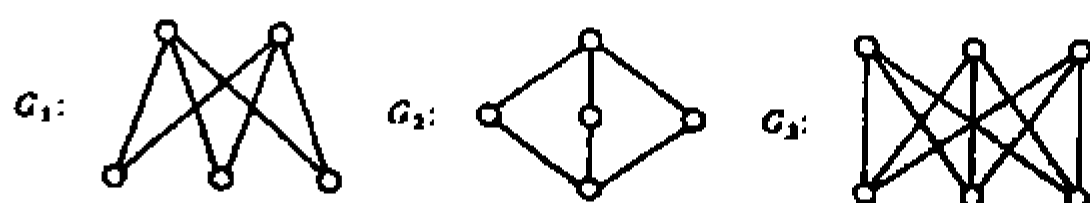


图 5.1 可平面图,平面图和不可平面图

反两面都印刷电路,或者用多于一块的印刷电路板并用跨接线把它们连接起来。问题自然有对于给定的电路图 G,最少需要几块印刷电路板?由此可导出图论的另一个问题。

对于一个平面图 G,G 的所有边将平面划分为若干个不交的连通区域,每一个连通区域称为 G 的一个面.对于平面图 G 的一个面 R,R 的边界是由对应于 G 的顶点和边的全部这样一些点 x 组成,点 x 能由一条连续曲线连接到 R 中的一点,且这条曲线上的所有点(除 x 以外)都是属于 R 的。每一个平面图都有唯一的一个无界面,称为 G 的外面,其它面称为 G 的内面。如果 G 嵌入在球面上,那么没有一个面能被看成外面。另一方面,对于任意平面图 G,总存在 G 的平面嵌入使得 G 的某个已知面变成外面,所以平面图 G 总存在平面嵌入使得任何顶点或者边落在外面的边界上。图 5.1 的平面图 G_2 有三个面,并且每个面的边界都是 4 - 圈.由面的边界定义可知:平面图 G 的任何一个面 R 的边界都是 G 的边不交圈和桥的并。

任何连通平面图的阶、大小和面数由 Euler 发现的一个著名公式联系着。

定理 5.1(Euler 公式) 如果 G 是一个具有 p 个顶点,q 条边和 r 个面的连通平面图,那么

$$p - q + r = 2。$$

证明 对 q 使用归纳法。当 $q = 0$ 时,因为 $p = 1$ 且 $r = 1$,所以定理成立。假设对于具有小于 $q(q > 0)$ 条边的连通图定理成立。设图 G 是有 q 条边的连通平面图。如果 G 是树,那么 $p = q + 1$ 且 $r = 1$,所以定理成立。如果 G 不是树,设 e 是 G 的一条圈边,则 $G - e$ 是连通平面图满足 $p = p(G - e)$,$q - 1 = q(G - e)$ 且有 $r - 1$ 个面,所以,由归纳假设,$p - (q - 1) + (r - 1) = 2$,这意味着 $p - q + r = 2$,定理成立。∎

由上述定理得出一个连通可平面图在平面上任何二种嵌入所产生的平面图有同样多的面数,因此可以定义连通平面图的面数.一般说来,对于可平面图下述结果成立。

推论 5.1 如果 G 是一个有 p 个顶点,q 条边和 r 个面的平面图,那么

$$p - q + r = 1 + k(G)。$$

如果对于可平面图 G 的每对非邻接顶点 u 和 v,图 $G + uv$ 是不可平面图,

则称G为最大可平面图。由最大可平面图的定义可得，如果G是至少有三个顶点的最大可平面图，则在G的任何平面嵌入中，G的所有面的边界都是三角形。由于这个原因，最大可平面图也称为平面的三角剖分。

对于一个已给顶点数p的可平面图，边数q存在一个上界，q的上界可以从下面结果中得到。

定理 5.2 如果G是一个最大可平面的(p,q)图，且$p \geq 3$，则

$$q = 3p - 6。$$

证明 设G的面数为r。由于G中每个面的边界都是三角形，而每一条边都在两个不同面的边界上，因此对全部面的边界上的边数求和可得$3r$。另一方面，在这个求和过程中，每一条边重复计算了两次，所以$3r = 2q$。

由定理 5.1，可得$q = 3p - 6$。■

推论 5.2a 如果G是一个可平面的(p,q)图且$p \geq 3$，则

$$q \leq 3p - 6。$$

证明 把足够多的边加到G上使得产生的(p,q')图G'是最大可平面图。由$q \leq q'$及$q' = 3p - 6$可得$q \leq 3p - 6$。■

下面给出推论 5.2a 的一个直接而又非常重要的结果。

推论 5.2b 任意平面图G包含一个度最多为 5 的顶点，即$\delta(G) \leq 5$。

证明 设G是具有顶点集$V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$的一个可平面的$(p,q)$图。如果$p \leq 6$，则结果成立，从而可假设$p > 6$。如果$G$的全部$p$个顶点的度大于或等于 6，则由推论 5.2a 可得：

$$6p \leq \sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2q \leq 6p - 12,$$

矛盾，因此G至少包含一个度最多为 5 的顶点。■

对于一个阶至少为 4 的最大可平面图G，如果$v \in V(G)$，则v既不是G的孤立点也不是悬挂点。如果$\deg(v) = 2$且$uv, wv \in E(G)$，则边界包含v的两个区域中至少有一个面的边界不是三角形，与G为最大可平面图矛盾，从而$\delta(G) \geq 3$。利用上述结论，可以得到最大可平面图的一个与顶点度有关的重要特性。

推论 5.2c 设G是一个阶$p(p \geq 4)$的最大可平面图，且p_i表示G中度为i的顶点个数$(3 \leq i \leq \Delta(G) = n)$，那么

$$3p_3 + 2p_4 + p_5 = p_7 + 2p_8 + \cdots + (n-6)p_n + 12.$$

证明 设$q = q(G)$。由定理 5.2 可知，$q = 3p - 6$。因为

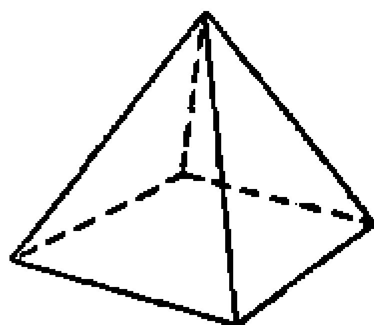
$$p = \sum_{i=3}^{n} p_i \text{ 且 } 2q = \sum_{i=3}^{n} i p_i,$$

从而

$$\sum_{i=3}^{n} i p_i = 6\sum_{i=3}^{n} p_i - 12。$$

故有

$$3p_3 + 2p_4 + p_5 = p_7 + 2p_8 + \cdots + (n-6)p_n + 12。■$$



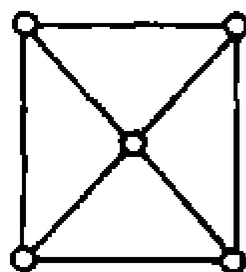


图 5.2 一个多面体和它相应的平面图

平面图的理论与多面体的研究密切相关：事实上，由于每个多面体 P 可以与一个连通可平面图 $G(P)$ 相对应，$G(P)$ 的顶点和边是 P 的顶点和棱，那么 $G(P)$ 的每个顶点的度至少为3。由于$G(P)$是一个平面图，那么P的面就是$G(P)$的面，并且$G(P)$的每一条边落在两个不同面的边界上。图 5.2 表示了一个多面体和它相应的平面图。

一个多面体 P 的顶点，棱和面的数目分别用 V，E 和 F 来表示，而且，这些分别是连通平面图 $G(P)$ 的顶点数，边数和面数。根据定理 5.1，V，E 和 F 是相关的，由此产生的这个结果就是著名的 Euler 多面体公式。

定理 5.3（Euler 多面体公式） 如果 V，E 和 F 是一个多面体的顶点数，棱数和面数，那么

$$V - E + F = 2。$$

在研究一个多面体 P 时（$G(P)$ 也同样），用 V_n 表示度为 n 的顶点个数且用 F_n 表示 n- 圈作为边界的面的个数，从而有

$$2E = \sum_{n\geq 3} nV_n = \sum_{n\geq 3} nF_n。\tag{5.1}$$

根据推论 5.2b，每一个多面体至少有一个度为 3，4 或 5 的顶点。与这个结果相似，可以得到如下结果。

定理 5.4 每一个多面体至少有一个面的边界是 n- 圈，其中 $n = 3,4$ 或 5。

证明 假设 $F_3 = F_4 = F_5 = 0$，从而由方程(5.1)可得：

$$2E = \sum_{n\geq 6} nF_n \geq 6\sum_{n\geq 6} F_n = 6F,$$

所以 $E \geq 3F$，同样也有

$$2E = \sum_{n\geq 3} nV_n \geq \sum_{n\geq 3} 3V_n = 3V。$$

由定理 5.3 可得，$V - E + F = 2$。从而

$$E \leq \frac{2}{3}E + \frac{1}{3}E - 2 = E - 2,$$

矛盾。■

一个正多面体是每一个面以全等正多边形作为边界且多面体的顶角是全等的多面体。对任意一个正多面体 P，存在自然数 h 和 k 使得 $V = V_k$ 且 $F = F_h$。例如立方体是正多面体，此时 $V = V_3$ 且 $F = F_4$，另外还有四个正多面体，这五种正多面体也被称为晶体。在两千多年前，希腊人已经知道世界上只有五种正多面体。

定理 5.5 仅有五种不同的正多面体。

证明 设 P 是一个正多面体且 $G(P)$ 是 P 相应的平面图，那么由定理 5.3 可知：$V - E + F = 2$，其中 V、E 和 F 分别表示 $G(P)$ 的顶点、边数和面数，因此

$$\begin{aligned} -8 &= 4E - 4V - 4F = 2E + 2E - 4V - 4F \\ &= \sum_{n\geq 3} nF_n + \sum_{n\geq 3} nV_n - 4\sum_{n\geq 3} V_n - 4\sum_{n\geq 3} F_n \\ &= \sum_{n\geq 3}(n-4)F_n + \sum_{n\geq 3}(n-4)V_n. \end{aligned}$$

因为 P 是正多面体，所以存在整数 $h(h \geq 3)$ 和 $k(k \geq 3)$，使得 $F = F_h$，$V = V_k$。故

$$-8 = (h-4)F_h + (k-4)V_k \text{ 且 } hF_h = kV_k = 2E。\qquad (5.2)$$

由于 $3 \leq h \leq 5$，$3 \leq k \leq 5$，故 h 和 k 存在九种可能的取值。

情况 1 如果 $h = 3$，$k = 3$，则(5.2) 式为

$$-8 = -F_3 - V_3 \text{ 且 } 3F_3 = 3V_3,$$

所以 $F_3 = V_3 = 4$。因此 P 是正四面体（正四面体是唯一满足 $F_3 = V_3 = 4$ 的正多面体）。

情况 2 如果 $h = 3$，$k = 4$，则(5.2) 式为

$$-8 = -F_3 \text{ 且 } 3F_3 = 4V_4,$$

所以 $F_3 = 8$，$V_4 = 6$，这意味着 P 是正八面体。

情况 3 如果 $h = 3$，$k = 5$，则(5.2) 式为

$$-8 = -F_3 + V_5 \text{ 且 } 3F_3 = 5V_5,$$

所以 $F_3 = 20$，$V_5 = 12$，从而 P 是正二十面体。

情况 4 如果 $h = 4$，$k = 3$，则(5.2) 式为

$$-8 = -V_3 \text{ 和 } 4F_4 = 3V_3,$$

这样 $V_3 = 8$，$F_4 = 6$，故 P 是立方体 — 正六面体。

情况 5 如果 $h = 4$，$k = 4$，这是不可能的，因为(5.2) 式变为 $-8 = 0$。

情况 6 如果 $h = 4, k = 5$，这种情况也不可能出现，否则由(5.2)式可得 $-8 = V_5$。

情况 7 如果 $h = 5, k = 3$，则(5.2)式为

$$-8 = F_5 - V_3 \text{ 且 } 5F_5 = 3V_3,$$

求解上式可得 $F_5 = 12, V_3 = 20$，所以 P 是正十二面体。

情况 8 如果 $h = 5, k = 4$，则由(5.2)式可得 $-8 = F_5$，这是不可能的。

情况 9 如果 $h = 5, k = 5$，则由(5.2)式可得 $-8 = F_5 + V_5$。这也是不可能的。

由此可知所有正多面体仅有五种。■

图 5.3 表示了五种正多面体图。

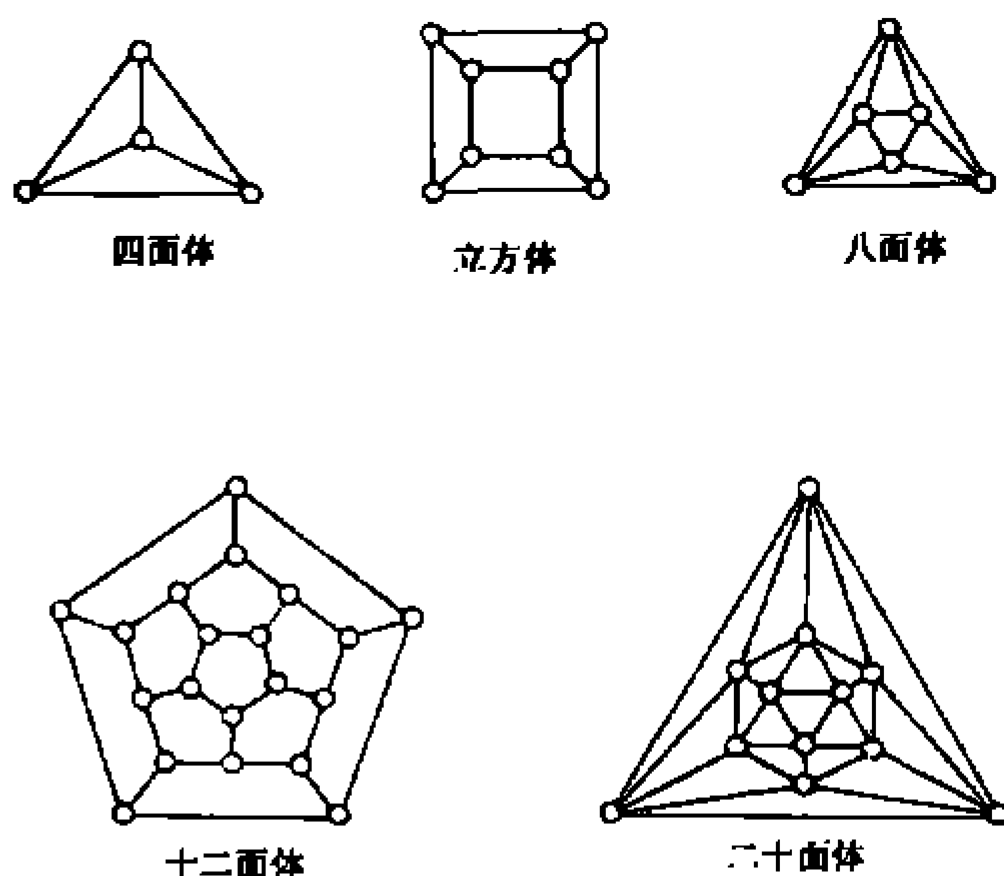


图 5.3 正多面体图

练习

1. 给出一个没有顶点度小于 5 的平面图例子。
2. 证明：任意一个阶 $p \geq 4$ 的平面图至少有 4 个顶点的度小于或等于 5。
3. 证明推论 5.1。
4. (a) 证明：可平面的(p,q)图是最大可平面图当且仅当 $q = 3p - 6$。
   (b) 证明：只存在一个 4- 正则最大可平面图。
5. 图 G 是最小不可平面的，如果 G 是不可平面图，但对 G 的任何一条边 e

$G-e$ 是可平面的。证明最小不可平面图是连通的且是一个块。

5.2 平面图的特征

根据平面图的定义，平面图的研究必须涉及平面拓扑学。然而，在这里我们不严格地采用拓扑方式论述，而仅满足于采用朴素的拓扑观点。这样，就不至于模糊平面图主要的组合面貌。

与平面图研究特别有关的拓扑学成果是 Jordan 曲线的一些内容（一条 Jordan 曲线是指一条连续的、自身不相交的、起点和终点相重合的曲线）。平面图的圈中各条边的并集构成一条 Jordan 曲线，这正是 Jordan 曲线的性质能在平面图理论中起作用的原因。下面重温一个有关 Jordan 曲线的著名定理。

设 J 是平面上的一条 Jordan 曲线，平面的剩余部分被分为两个不相交的并集，称为 J 的内部和外部，分别记为 $\mathrm{int}(J)$ 和 $\mathrm{ext}(J)$，并且用 $\mathrm{Int}(J)$ 和 $\mathrm{Ext}(J)$ 表示它们的闭包。显然 $\mathrm{Int}(J)\cap\mathrm{Ext}(J)=J$。Jordan 曲线定理指出：连接 $\mathrm{int}(J)$ 的任意点和 $\mathrm{ext}(J)$ 的任意点的任何曲线必在某一点与 J 相交。尽管在直观上这个定理是明显的，但是它的严格证明却十分困难。

在平面图的研究中有两个图 K_5 和 $K_{3,3}$（图 5.4 所示）起了关键性作用。下面从研究图 K_5 和 $K_{3,3}$ 的特性开始。



图 5.4 不可平面图 K_5 和 $K_{3,3}$

定理 5.6 图 K_5 和 $K_{3,3}$ 是不可平面图。

证明 首先证明 K_5 是不可平面图。假设 K_5 是可平面图。因为 K_5 有 $p=5$ 个顶点，有 $q=10$ 条边，且

$$10=q>3p-6=9,$$

这与推论 5.2a 矛盾，所以 K_5 是不可平面图。

下面证明 $K_{3,3}$ 是不可平面图。假设 $K_{3,3}$ 是可平面图。考虑它的任何一个平面嵌入，因为 $K_{3,3}$ 是二部图，所以 $K_{3,3}$ 不含奇圈，这样它的每一个面的边界为偶长圈。设 $K_{3,3}$ 有 r 个面。在全部 r 个面上，对每个面边界的边数求和，用 N 代表这个结果，于是 $N\geq 4r$。因为在和数 N 的计算过程中每条边计算了二次，且 $K_{3,3}$ 有 $q=9$ 条边，故 $N=18$，从而 $r\leq\frac{9}{2}$。由定理 5.1 可得 $r=2-p+q=$

5，这是不可能的，所以 $K_{3,3}$ 是不可平面的。■

为了给出关于图 G 是可平面的一个重要判别法，需要引入图上的一些新概念。一个非空图 G 的基本细分是从 G 中移去某一条边 $e=uv$，并且加上一个新的顶点 w 和两条边 uw 及 wv 得到的图。图 G 的一个细分是从 G 开始通过一系列基本细分得到的图。如果图 $H\cong G$ 或者图 H 同构于图 G 的一个细分，则称图 H 为从 G 同胚。如果存在一个图 G_3 使得图 G_1 和图 G_2 都为从 G_3 同胚，则称图 G_1 与图 G_2 是同胚的。图 5.5 中的图 G_1 和 G_2 是互相同胚的，因为每一个都从 G_3 同胚，但是 G_1 和 G_2 都不从另一个图同胚。

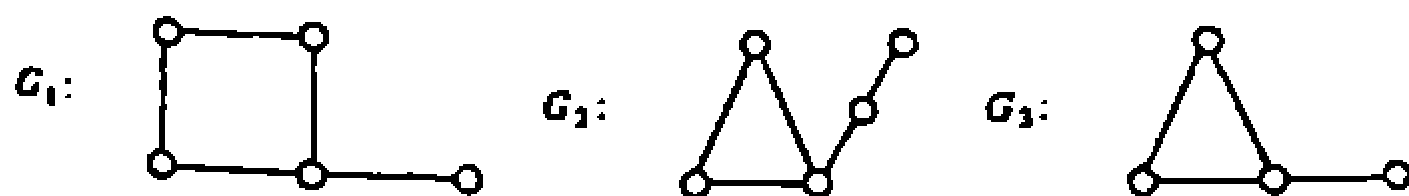


图 5.5 同胚

容易验证，图与图之间的同胚关系是一个等价关系。由此图集可以分成等价类，两个图属于同一类当且仅当它们是同胚的。显然与一个图 G 同胚的任何图是可平面的还是不可平面的取决于 G 是否为可平面的。同样如果一个图 G 包含一个不可平面图的细分，那么 G 也是不可平面的。把这些事实与上述结果结合起来，就得到下面结论。

定理 5.7 如果图 G 包含一个与 K_5 或者与 $K_{3,3}$ 同胚的子图，那么图 G 是不可平面图。

事实上，定理 5.7 的逆定理也是正确的。定理 5.7 以及它的逆定理提供了可平面图的判别法。毫无疑问它是图论中最著名的定理之一。在给出由 Kurstowski 首先描述的这个结果以前，需要给出可平面图的另外一个特征。

定理 5.8 一个图是可平面图当且仅当它的每一个块是可平面的。

证明 显然，一个图 G 是可平面的当且仅当它的每个分支是可平面的，所以可以假设 G 是连通的。如果 G 是可平面的，当然 G 的每一个块是可平面的，从而必要性成立。

为了证明充分性，对 G 的块数进行归纳。如果 G 只有一个块且这个块是可平面的，那么 G 是可平面的。假设对块数小于 $n(n\geq 2)$ 的所有连通图，充分性成立。设图 G 是有 n 个块且每一个块是可平面的。取 B 是 G 的一个悬挂块，并且 v 表示 B 包含的图 G 的唯一的割点。记 $G'=G-(V(B)\backslash\{v\})$，则 G' 是从 G 中去掉属于 B 且不同于 v 的全部顶点后产生的图。因为 G' 的块数为 $n-1$，由归纳假设可知 G' 是可平面图。又因为块 B 是可平面的，从而存在 B 的平面

嵌入使 v 落在外面的边界上，在边界上包含 v 的 G' 任何一个平面嵌入的面内，B 可以被适当地放入使得 G' 和 B 中标号为 v 的两个顶点“重合”。由此得到图 G 的一个平面嵌入，所以 G 是一个可平面图。■

设 H 为图 G 的一个不包含孤立顶点的给定子图，在 $E(G)\backslash E(H)$ 上定义关系 $\sim$ 如下：$e_1 \sim e_2$ 当且仅当存在图 $G - E(H)$ 中的一条路 P 使得：

(i) P 的第一条边和最后一条边分别是 e_1 和 e_2，并且

(ii) P 的任意一个内部顶点不与 H 的边关联。

容易验证关系 $\sim$ 是 $E(G)\backslash E(H)$ 上的一个等价关系。由关系 $\sim$ 的等价类导出的 $G-E(H)$ 的子图称为 G 中 H 的片。从片的定义可以直接推出：若 B 是 H 的片，则 B 为连通图，且 B 的任意两个顶点之间都存在与 H 内不交的路。另外可知，H 的两个不同片的所有公共顶点一定是 H 的顶点。对于 H 的片 B，记 $V(H)\cap V(B)=V(B,H)$，称这个集合为 B 与 H 的接触顶点集，且该集合中的每一个顶点称为 B 与 H 的接触顶点。下面主要研究圈 C 的片，为了避免重复，约定将“C 的片”简称为“片”，且所有的片均是给定圈 C 的片。

在连通图中，每个片至少有一个接触顶点；而在块中，每个片至少有两个接触顶点。具有 k 个接触顶点的片称为 k 片；如果两个 k 片具有相同的接触顶点，则称为等价 k 片。如果 B 为 $k(k\geq 2)$ 片，则由 B 的所有接触顶点将 C 分为 k 条边不交的路，称为 B 的段。如果一个片的所有接触顶点位于另一个片的同一段中，则称这两个片互相回避；否则称它们交叠。设 B 和 B' 为两个片 u,u',v 和 v' 为 C 的四个不同顶点，且顶点 u 和 v 是 B 的接触顶点，顶点 u' 和 v' 是 B' 的接触顶点。如果这 4 个顶点按循环顺序 u,u',v,v' 排列在 C 上，则称 B 和 B' 是偏斜的。

在图 5.6 中，片 B_1 和 B_2 是等价 3 片；片 B_2 和 B_3 是互相回避的；片 B_1 和 B_3 是交叠的；片 B_3 和 B_4 是偏斜的而片 B_1 和 B_2 不是偏斜的。

引理 5.9a 若两个片交叠，则它们或者是偏斜的，或者是等价 3 片。

证明 假设片 B 和 B' 交叠。显然每个片都至少有两个接触顶点。若 B 和 B' 中有一个是 2 片，则容易验证它们必然是偏斜的，所以可以假设 B 和 B' 都至少有 3 个接触顶点。下面分两种情况讨论：

情况 1 B 和 B' 不是等价片。存在 B' 的一个接触顶点 u' 在 B 的两个相继接触顶点 u 和 v 之间。由于 B' 和 B 交叠，存在 B' 的另一个接触顶点 v' 不在 B 的连接 u 和 v 的段上。由此可得 B' 和 B 是偏斜的。

情况 2 B 和 B' 是等价 $k(k\geq 3)$ 片。若 $k\geq 4$，则 B 和 B' 是偏斜的；若 $k=3$，则 B 和 B' 是等价 3 片。■

引理 5.9b 若片 B 至少有三个接触顶点 v_1,v_2 和 v_3，则在 $V(B)\backslash V(C)$ 中

存在一个顶点 v_0 使得在 B 中存在与 C 内不交的、分别连接顶点 v_0 到 v_1,v_2 和 v_3 的、三条内不交的路 P_1,P_2 和 P_3。

证明 设 P 是 B 中与 C 内不交的 $v_1—v_2$ 路，则必有 P 的一个内部顶点 v，否则，$B=P$，与 B 至少有三个接触顶点矛盾。设 Q 是 B 的一条与 C 内不交的 $v—v_3$ 路，且 v_0 是 Q 与 P 的最后一个公共顶点。令 P_1 为 P 的 $v_0—v_1$ 子路；P_2 为 P 的 $v_0—v_2$ 子路且 P_3 为 Q 的 $v_0—v_3$ 子路，则 P_1,P_2 和 P_3 恰好满足引理结论。■

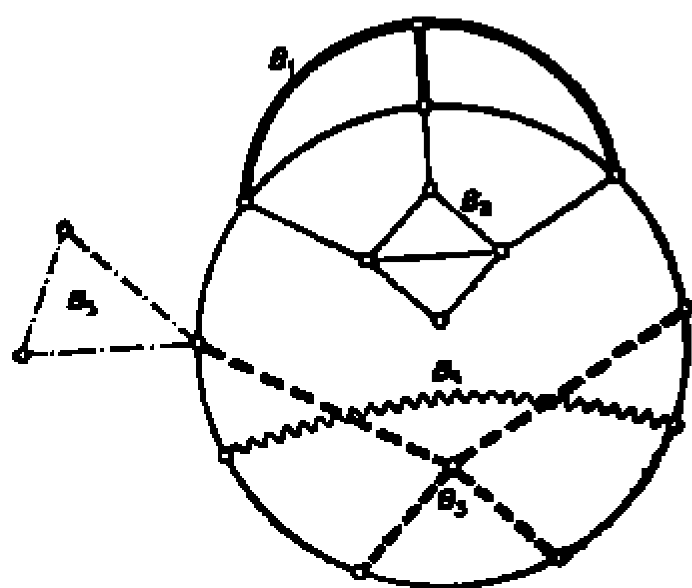


图 5.6 图中的片

假设 G 为平面图，C 为 G 的圈，则 C 是平面上的一条 Jordan 曲线，而 $E(G)\backslash E(C)$ 的每条边一定包含在两个区域 $\text{Int}(C)$ 和 $\text{Ext}(C)$ 之一中。由此可知，任何一个 C 的片或者全部包含在 $\text{Int}(C)$ 中，或者全部包含在 $\text{Ext}(C)$ 中。全部包含在 $\text{Ext}(C)$ 中的片称为外片，全部包含在 $\text{Int}(C)$ 中的片称为内片。

引理 5.9c 任意两个内片（或外片）是互相回避的。

证明 用反证法。设 B 和 B' 是两个互相交叠的内片。由引理 5.9a，它们必然是偏斜的或者是等价 3 片。

如果 B 和 B' 是偏斜的，则存在 B 的接触顶点 u 和 v 以及 B' 的接触顶点 u' 和 v' 使得 u,u',v,v' 按循环顺序排列在 C 上。设 P 是 B 中与 C 内不交的 $u—v$ 路，P' 是 B' 中与 C 内不交的 $u'—v'$ 路。因为路 P 和 P' 属于不同的片，所以它们是内不交的。又因为 B 和 B' 是内片，故 P 和 P' 必须包含在 $\text{Int}(C)$ 中，根据 Jordan 曲线定理，G 不是平面图，与引理条件矛盾。

从而可假设 B 和 B' 是等价 3 片。设 B 和 B' 的公共接触顶点集是 $\{v_1,v_2,v_3\}$。由引理 5.9b，在 B 中存在顶点 v_0，以及与 C 内不交的、分别连接顶点 v_0 到 v_1,v_2 和 v_3 的、三条内不交的路 P_1,P_2 和 P_3。类似地，B' 有一个顶点 v'_0 及与 C 不交的、分别连接顶点 v'_0 到 v_1,v_2 和 v_3 的、三条内不交的路 P'_1,P'_2 和 P'_3。由于路 P_1,P_2 和 P_3 将 $\text{int}(C)$ 划分为三个区域，且 v'_0 必然位于这三个区域之一的内部，由于包含 v'_0 的区域的边界只能包含 v_1,v_2 和 v_3 中的两个顶点，所以另一个顶点一定位于该区域的外部。根据 Jordan 曲线定理，连接该区域内外两个顶点的曲线一定与区域边界相交，与 G 为平面图矛盾。

从而可以断言，内片互相回避。同理，外片也互相回避。■

设 G 是一个平面图，C 是 G 的一个圈且 B 是 C 的内片，如果存在图 G 的另一个平面嵌入 G' 使得除去 B 在 G' 中是 C 的外片以外，G' 和 G 是恒等的，则称 G' 是从 G 移动 B 而得到的平面图，且称 B 是可移动的。

引理 5.9d 与每个外片都互相回避的内片是可移动的。

证明 设 B 是与每个外片都互相回避的内片，则 B 的所有接触顶点都位于 G 的包含在 $\mathrm{Ext}(C)$ 中的某个面的边界上，于是 B 能够画在这个面中，所以 B 是可移动的。■

引理 5.9e 如果 G 为最小的不可平面图，则 G 是 3-连通的。

证明 假设 G 是最小的不可平面图，且 G 不是 3-连通的。由于 G 是最小的不可平面图，所以 G 是连通的且 G 是一个块。（见第 5.1 节练习 5）

如果存在 G 的 2 顶点割 $\{u,v\}$ 使 $G-\{u,v\}$ 不连通，记 G' 为 $G-\{u,v\}$ 的一个连通分支，$G_1=\langle V(G')\cup\{u,v\}\rangle+e$ 且 $G_2=G-V(G')+e$，其中 $e=uv$（如果 $uv\in E(G)$，则在 G_1 和 G_2 中不再加入边 uv 即可）。由 G 为最小不可平面图可知，G_1 和 G_2 是可平面图，且存在 G_1 和 G_2 的平面嵌入 $\hat{G}_1$ 和 $\hat{G}_2$ 使得对应于 uv 的边位于外面的边界上。将 $\hat{G}_1$ 画在 $\hat{G}_2$ 的外面上，移动 $\hat{G}_1$ 使得对应于 e 的边重合，由此得到 G 是可平面的，矛盾。■

在 Kuratowski 定理的证明中，约定以下简化记号：设 C 为平面图 G 的一个圈，则 C 存在两种可能的定向，即“顺时针”和“逆时针”方向。对于 C 上的任意两个顶点 u 和 v，用 $C[u,v]$ 表示沿着 C 的逆时针方向的一条 u—v 路；类似地，用 $C(u,v]$，$C[u,v)$ 和 $C(u,v)$ 分别表示路 $C[u,v]-u$，$C[u,v]-v$ 和 $C[u,v]-\{u,v\}$。

定理 5.9(Kuratowski) 一个图是可平面的当且仅当它不包含与 K_5 或与 $K_{3,3}$ 同胚的子图。

证明 定理 5.7 保证定理的必要性成立，因此只需要证明充分性即可。由定理 5.8，只要证明：如果一个块不含与 K_5 或与 $K_{3,3}$ 同胚的子图，那么它是可平面的。用反证法。假设存在块不包含与 K_5 或与 $K_{3,3}$ 同胚的子图，但是它是不可平面的。在全部这样的块中，设 G 是最小的一个块，即当 H 也是不可平面的块时，$P(G)<p(H)$，或者 $p(G)=p(H)$ 且 $q(G)<q(H)$。

由引理 5.9e 可知：G 是 3-连通的，且 $\delta(G)\geq 3$。由推论 2.9，图 G 不是一个最小块，所以存在一条边 $e=uv$，使 $H=G-e$ 也是一个块。因为 H 不包含与 K_5 或与 $K_{3,3}$ 同胚的子图，且 $p(H)=p(G)$，$q(H)<q(G)$，所以 H 是可平面的。又因为 H 是一个块，所以存在 H 的一个圈 C 同时包含顶点 u 和 v。选取 H 的一个平面嵌入 $\hat{H}$ 和 $\hat{H}$ 中的同时包含顶点 u 和 v 的圈 C 使得 C 内部的面数

最多。由$\hat{H}$和C的选取方式可知：$\hat{H}$中C的每一个外片必然仅有两个接触顶点，且一定是交叠于u,v的，否则若某一个外片是$k\geq 3$的k片，或者是回避u，v的2片，则存在一个同时包含u,v，而且内部面数比C更多的圈C'（见图5.7，其中用粗线表示C'），这与C的取法矛盾。

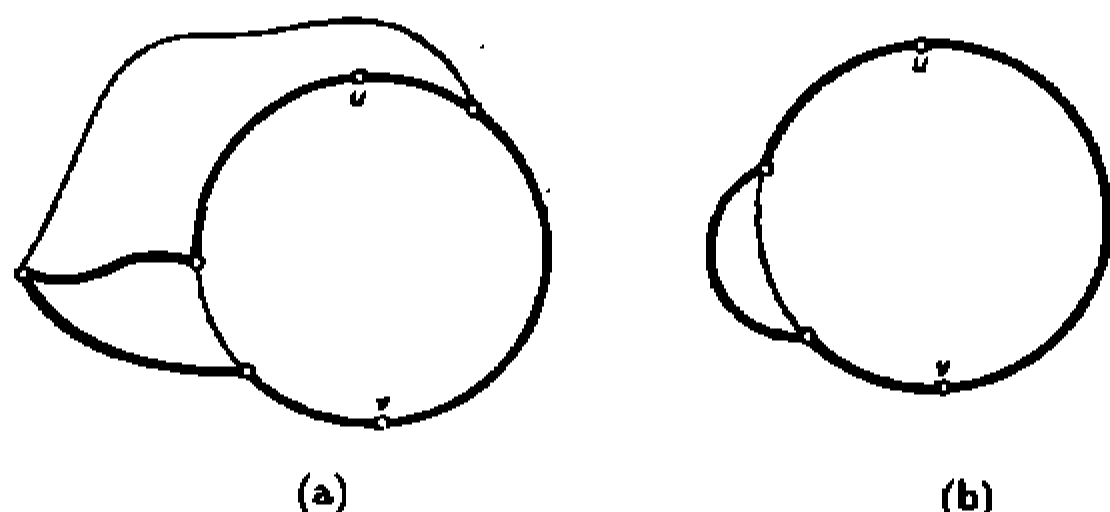


图5.7

事实上，$\hat{H}$中C的所有外片必然是只包含一条边，否则，若具有接触顶点x和y的2片存在第三个顶点w，则$\{x,y\}$为G的2顶点割，与引理5.9e的结论矛盾。

根据引理5.9c，没有两个内片交叠。另一方面，存在$\hat{H}$的一个内片既偏斜于uv，也与某一个外片交叠，否则，由引理5.9d，所有偏斜于uv的内片都是可移动的，从而可以移动所有这样的内片，最后将uv画在C的内部，由此可得到G的一个平面嵌入，与G是不可平面图矛盾。设B是一个既偏斜于uv，又偏斜于外片xy的内片，且u,x,v和y在C上按照逆时针方向排列。

下面按照B是否具有不同于u,v,x和y的接触顶点，分两种情况进行讨论。

情况1 B有不同于u,v,x和y的接触顶点v_1（见图5.8），假设v_1在$C(u,x)$上（v_1在路$C(x,v)$，$C(v,y)$或者$C(y,u)$上的情况与v_1在$C(u,x)$上时的讨论方法完全一样），下面按照B在$C(v,y)$中是否有接触顶点分两种情况进行考察。

情况1.1 B在$C(v,y)$中有接触顶点v_2。此时，在B中存在一条与C内不交的v_1—v_2路P。因此由$E(C)\cup E(P)\cup\{uv,xy\}$导出的$G$的子图与$K_{3,3}$同胚（见图5.8），与$G$不含与$K_{3,3}$同胚的子图矛盾。

情况1.2 B在$C(v,y)$中没有接触顶点。由于B与uv和xy均是偏斜的，于是，B在$C[y,u)$中有接触顶点v_2，且B在$C(x,v]$中有接触顶点v_3，故B有

三个接触顶点 v_1, v_2 和 v_3。由引理 5.9b，$V(B)\backslash V(C)$ 中存在一个顶点 v_0，以及与 C 内不交的、分别连接顶点 v_0 到 v_1, v_2，和 v_3 的、三条内不交的路 P_1, P_2 和 P_3，由 $E(C) \cup E(P_1) \cup E(P_2) \cup E(P_3) \cup \{uv, xy\}$ 导出的 G 的子图包含与 $K_{3,3}$ 同胚的子图（见图 5.9），与 G 不含与 $K_{3,3}$ 同胚的子图矛盾。

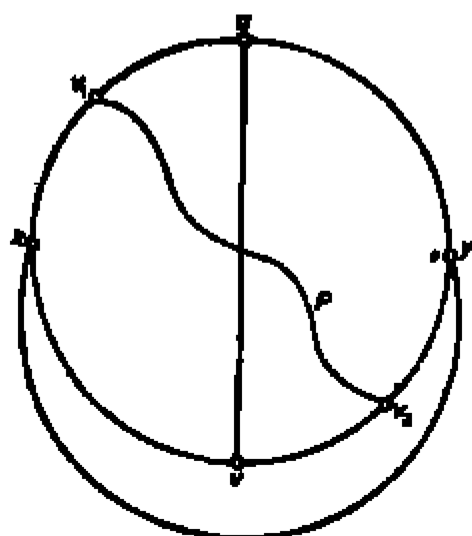


图 5.8

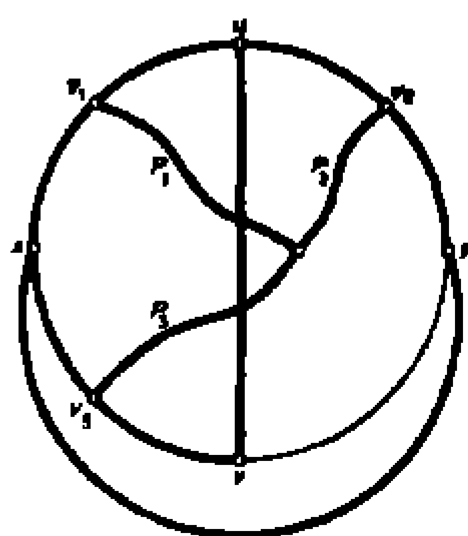


图 5.9

情况 2 除 u, v, x 和 y 以外，B 不存在其它的接触顶点。由于 B 对于 uv 和 xy 都是偏斜的，所以 u, v, x 和 y 均是 B 的接触顶点，且 B 中存在与 C 内不交的 u—v 路 P 和 x—y 路 Q 满足 $V(P) \cap V(Q) \neq \varnothing$。下面按照 P 和 Q 公共顶点的个数分两种情况考察。

情况 2.1 $|V(P) \cap V(Q)| = 1$。此时，由 $E(C) \cup E(P) \cup E(Q) \cup \{uv, xy\}$ 导出的 G 的子图与 K_5 同胚（见图 5.10），所以与定理条件矛盾。

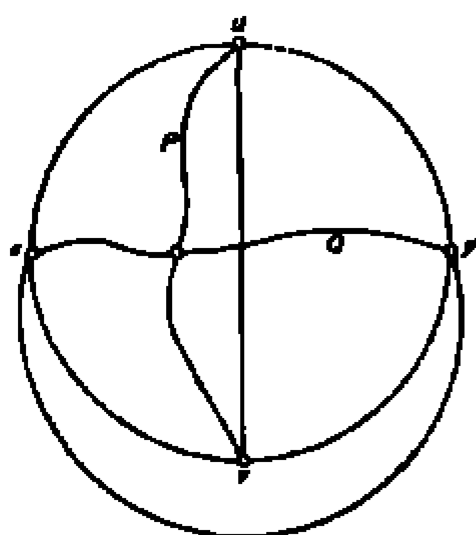


图 5.10

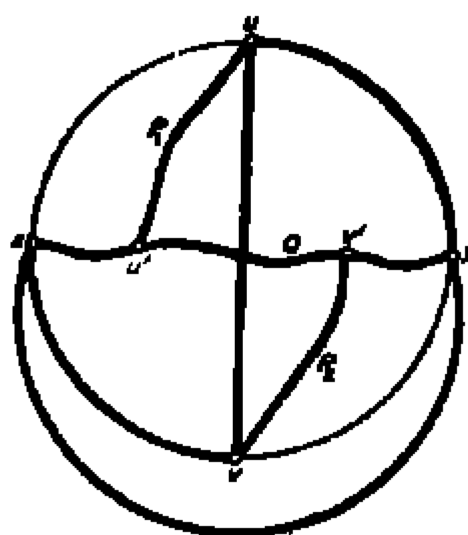


图 5.11

情况 2.2 $|V(P) \cap V(Q)| \geq 2$。此时，存在 P 与 Q 的第一个公共顶点 u' 和最后一个公共顶点 v' 使得 P 的 u'—u 子路 P_1 和 v'—v 子路 P_2 与 Q 是内不交的。此时，由 $E(C) \cup E(Q) \cup E(P_1) \cup E(P_2) \cup \{uv, xy\}$ 导出的 G 的子图

包含与 $K_{3,3}$ 同胚的子图(见图 5.11),与 G 不含与 $K_{3,3}$ 同胚的子图矛盾。

所有情况都导出矛盾,从而定理结论成立。■

Petersen 图是不可平面的(见图 5.12(a)),因为它包含一个图 5.12(b) 的图为子图,且这个子图与 $K_{3,3}$ 同胚。尽管它与完全图 K_5 非常类似,但 Petersen 图的确不包含与 K_5 同胚的子图。

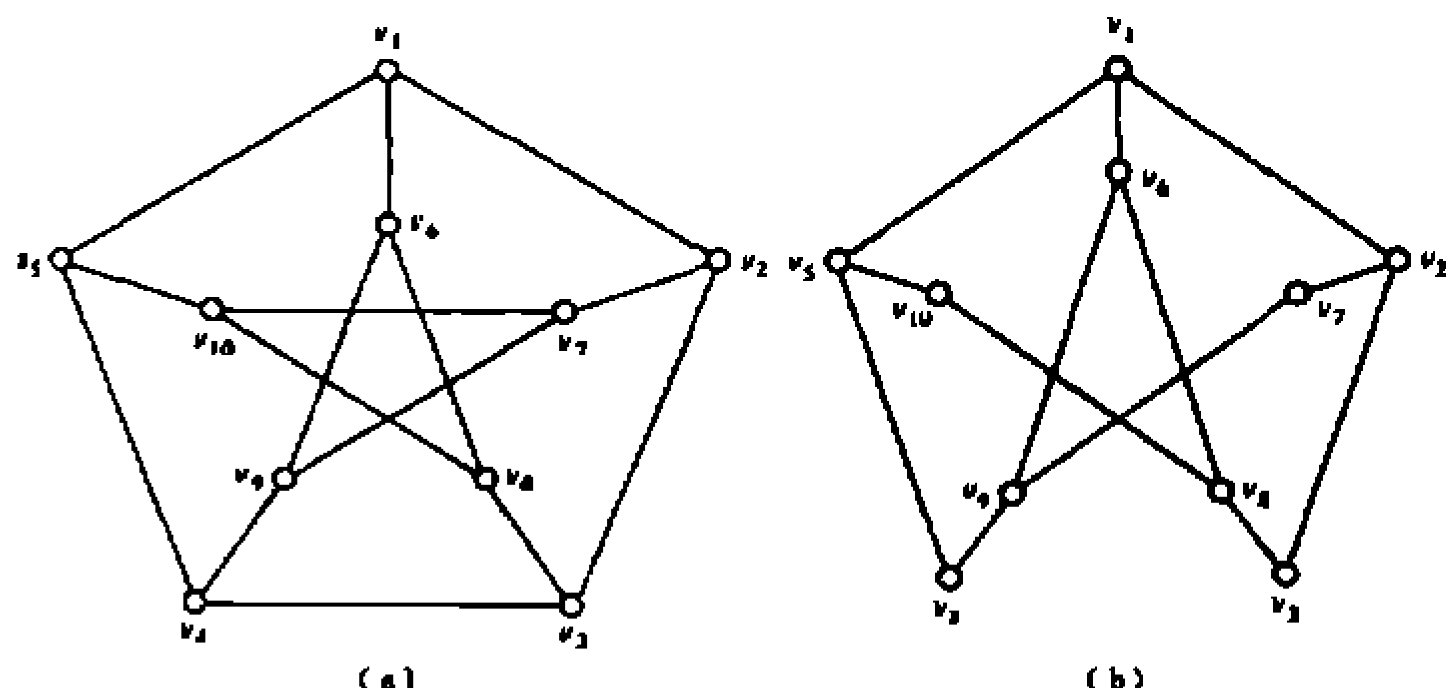


图 5.12 Petersen 图和一个与 $K_{3,3}$ 同胚的子图

在平面图的应用中,例如印刷电路板的设计,不仅需要了解给定的图是否为可平面图,而且需要知道如果给定图是可平面图,则如何得到它的一个平面嵌入。这样的问题就是平面图的算法问题,给定一个图,采用什么样的方法可以判断它是否是可平面的,且当它是可平面图时,可以直接得到它的一个平面嵌入。为了给出解决这个问题的好算法,引入某些附加术语。

设 H 是图 G 的一个平面子图。如果 G 是可平面的且 H 能够延拓到 G 的一个平面嵌入 $\hat{G}$,即 H 为 $\hat{G}$ 一个平面子图,则称 H 是 G- 可延拓的。设 G 是图 5.13 中的图,对于图 5.13 的平面子图 H_1 和 H_2,其中 $H_1 \cong H_2$,H_1 是 G- 可延拓的但 H_2 不是 G- 可延拓的。

设 H 是图 G 的一个平面子图且 R 是 H 的一个面,如果 G 中 H 的片 F 的全部接触顶点落在 R 的边界上,则称 F 是一个 R- 片。对于 H 的任意一个片 F,记 $\mathscr{R}(F,H)=\{R|F$ 是一个 R- 片$\}$。如图 5.14 所示,H 是 G 的平面子图,F 是 G 中 H 的一个片,且 $\mathscr{R}(F,H)=\{R_1\}$。

定理 5.10 如果可平面图 G 的一个平面子图 H 是 G- 可延拓的且 $G\neq H$,那么对于 G 中 H 的每个片 F,$\mathscr{R}(F,H)\neq\varnothing$。

证明 由于图 H 是 G- 可延拓的,则存在 G 的平面嵌入 $\hat{G}$ 使得 $H\subseteq\hat{G}$,对

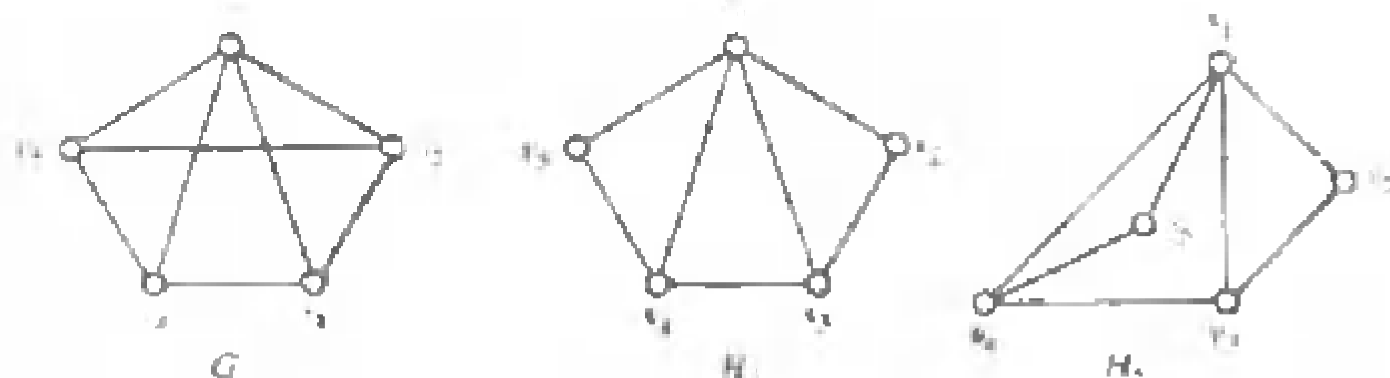


图 5.13

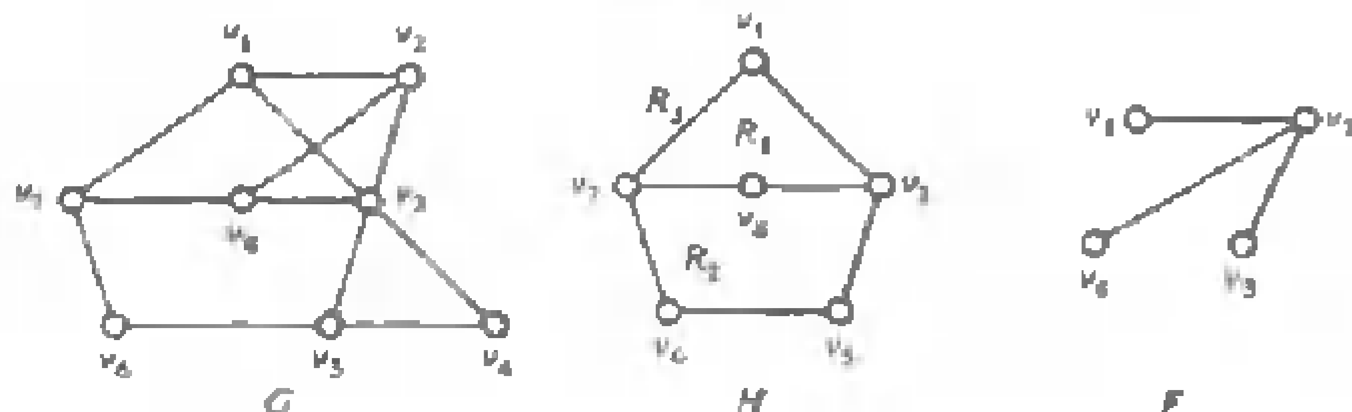


图 5.14

于 G 中 H 的任意一个片 B，B 对应的子图一定完全位于 H 的某一个面 R 内，从而 $R \in \mathscr{R}(B,H) \neq \varnothing$，定理结论成立。■

由于一个图是可平面图当且仅当它的每一个块是可平面的，所以只要考察 G 的每一个块即可。给定了一个 2-连通图 G 后，算法就确定了 G 的一列可平面子图 $G_i(1 \le i \le n)$ 以及对应的平面嵌入 $\hat{G}_i\ (1 \le i \le n)$ 使得对任意 $1 \le i < n$，$\hat{G}_i \subseteq \hat{G}_{i+1}$，而且当 G 是可平面图时，每一个平面子图 $\hat{G}_i$ 是 G 可延拓的，最后算法终止于 G 的一个平面嵌入 $\hat{G}_n$。

算法 5A 给定一个 2-连通图 G：

1. 设 G_1 是 G 的一个圈且 $\hat{G}_1$ 是 G_1 的平面嵌入，置 $i=1$。

2. 如果 $E(G)\backslash E(G_i)=\varnothing$，那么 G 是可平面的且 $\hat{G}_i$ 就是 G 的一个平面嵌入，从而停止。否则确定 G 中平面子图 $\hat{G}_i$ 的全部片，且对每一个片 F，确定集 $\mathscr{R}(F,\hat{G}_i)$。

3. 如果存在 G 中 $\hat{G}_i$ 的一个片 F 满足 $\mathscr{R}(F,\hat{G}_i)=\varnothing$，那么 G 是不可平面的，从而停止。如果存在一个片 F 使得 $|\mathscr{R}(F,\hat{G}_i)|=1$，那么选取片 F 和面 $R(R \in \mathscr{R}(F,\hat{G}_i))$，否则任取 $\hat{G}_i$ 的一个片 F 以及 $\hat{G}_i$ 的一个面 R 使 $R \in$

$\mathscr{R}(F,\hat{G}_i)$。

4. 选择 F 中的一条连接两个接触顶点且与 G_i 内不交的路 P。用 G_{i+1} 表示将 P 加入 G_i 后所得 G 的子图，$\hat{G}_{i+1}$ 表示将 P 画在面 R 内得到的平面图，则 $\hat{G}_{i+1}$ 是 G_{i+1} 的平面嵌入。用 $i+1$ 代替 i，转入第二步。

下面说明算法5A的正确性，即如果 G 是任意2-连通可平面图，则算法5A得到的子图列 $G_i(1\leq i\leq n)$ 满足 $\hat{G}_i$ 是 G-可延拓的$(1\leq i\leq n)$ 且 $G_n\cong G$。

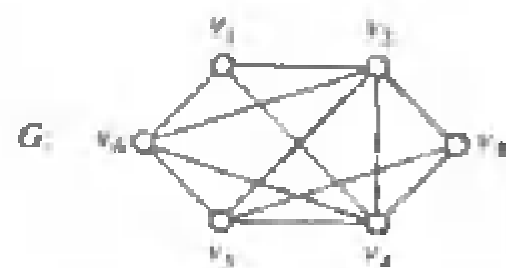
首先，由于 $G_i\subset G_{i+1}(1\leq i\leq n-1)$ 且 G 的阶和大小都是有限的，从而一定存在整数 n 使得算法结束(得到 G 的一个平面嵌入或者存在 G_n 的片 F 使得 $\mathscr{R}(F,\hat{G}_n)=\varnothing$)。利用归纳法证明：若 G 是平面图，则对于任意 $1\leq i\leq n$，$\hat{G}_i$ 是 G-可延拓的。

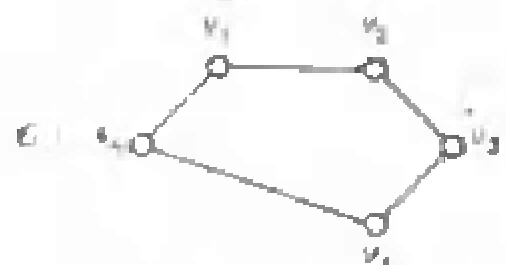
显然 $\hat{G}_1$ 是 G-可延拓的。假设对于任意 $1\leq i\leq k<n$，$\hat{G}_i$ 是 G-可延拓的。根据 G-可延拓的定义可知存在 G 的平面嵌入 $\hat{G}$ 使得 $\hat{G}_k\subset\hat{G}$。

当 $i=k+1$ 时，需要证明：$\hat{G}_{k+1}$ 是 G-可延拓的。设在算法的第三步选取的片为 F 且选取的面为 R。若 F 只能画在 $\hat{G}_k$ 的面 R 上，则在 $\hat{G}$ 中，F 也只能画在 $\hat{G}_k$ 的面 R 内，从而 $\hat{G}_{k+1}$ 是 G-可延拓的。如果存在 $\hat{G}_k$ 的其它面 R' 使得 $R'\in\mathscr{R}(F,\hat{G}_k)$，则 $|\mathscr{R}(F,\hat{G}_k)|\geq 2$。由算法的第三步可知：不存在 G_k 的片只能画在 $\hat{G}_k$ 唯一的一个面内。如果在 $\hat{G}$ 中，F 画在面 R 内，则 $\hat{G}_{k+1}$ 是 G-可延拓的，从而可假设在 $\hat{G}$ 中 F 画在 $\hat{G}_k$ 的面 R' 内。由于 F 既可以画在 R 内也可以画在 R' 内，则 F 与 G_k 的所有接触顶点都位于 $\hat{G}_k$ 的面 R 和 R' 的公共边界 Q 上。由于不存在 G_k 的片只能在 $\hat{G}_k$ 唯一的一个面画出，因此，对于 G_k 的任意一个片 $F_1(F\neq F_1)$，F 和 F_1 是互相回避的或者 F_1 的所有接触顶点都位于 Q 上，且当片 F_1 与 F 偏斜时，$R,R'\in\mathscr{R}(F_1,\hat{G}_k)$。换句话说，与 F 偏斜的所有片的接触顶点都位于 Q 上。从而可以交换所有接触顶点都位于 Q 上的片使得：原来画在 R 内的片，现在画在片 R' 内，而原来画在 R' 内的片，现在画在 R 内，由此得到 G 的另一个平面嵌入满足 F 画在面 R 内。从而 $\hat{G}_{i+1}$ 是 G-可延拓的。

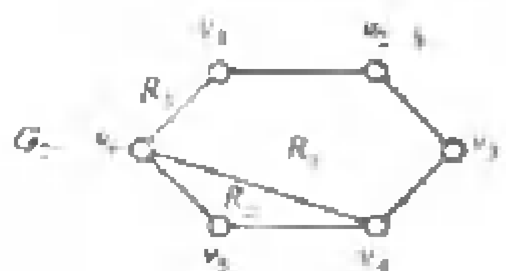
综上所述，在任何情况下 G_{k+1} 是 G-可延拓的，从而算法5A在有限步结束。由定理5.10，算法的第三步总可以得到：$E(G)\backslash V(G_n)=\varnothing$，或者选出 $\hat{G}_n$ 的一个片和一个面，且得到 G 的另一个平面子图 $\hat{G}_{n+1}$，但是算法在此时结束，说明 $\hat{G}_n$ 就是 G 的一个平面嵌入。

为了说明这个算法，考察两个例子





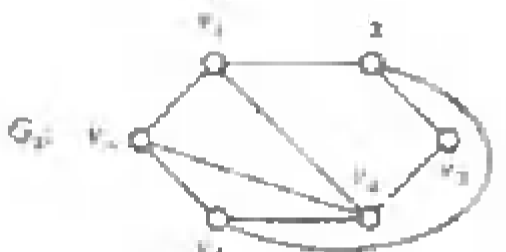
$F_1 = (\{v_1v_6, [illegible], v_4v_5, [illegible]\})$,
$F_2 = (\{v_1v_4\})$, $F_3 = (\{v_2v_6\})$, $F_4 = (\{v_2v_6\})$
$|R(F_i, G_1)| = 2\ (i = 1, 2, 3, 4)$



$F_5 = (\{v_1v_4\})$, $F_6 = (\{v_2v_4\})$, $F_7 = (\{v_2v_6\})$,
$F_8 = (\{[illegible]\})$, $F_9 = (\{[illegible]\})$
$R(F_5, G_2) = \{R_1, R_3\}$, $R(F_6, G_2) = \{R_1, R_3\}$
$R(F_7, G_2) = \{R_3\}$, $R(F_8, G_2) = \{R_1, R_3\}$
$R(F_9, G_2) = \{R_3\}$



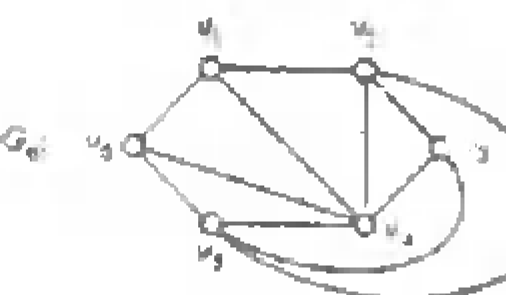
$F_{10} = (\{v_1v_4\})$, $F_{11} = (\{v_2v_4\})$,
$F_{12} = (\{v_2v_6\})$, $F_{13} = (\{v_6v_3\})$
$|R(F_i, G_3)| = 1\ (i = 10, 13)$
$|R(F_i, G_3)| = 2\ (i = 11, 12)$



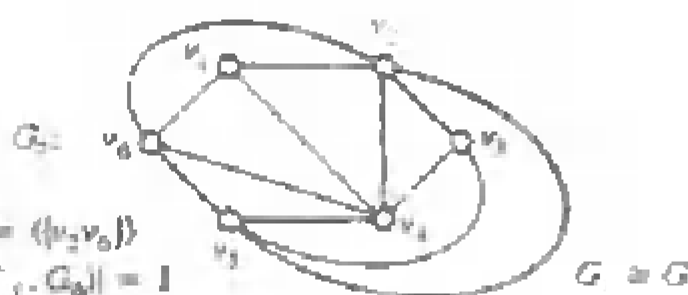
$F_{14} = (\{v_2v_4\})$, $F_{15} = (\{v_3v_4\})$, $F_{16} = (\{v_3v_6\})$
$|R(F_{14}, G_4)| = 2$, $|R(F_i, G_4)| = 1\ (i = 15, 16)$



$F_{17} = (\{v_2v_4\})$, $F_{18} = (\{[illegible]v_6\})$
$|R(F_i, G_5)| = 1\ (i = 17, 18)$



$F_{19} = (\{v_2v_6\})$
$|R(F_{19}, G_6)| = 1$

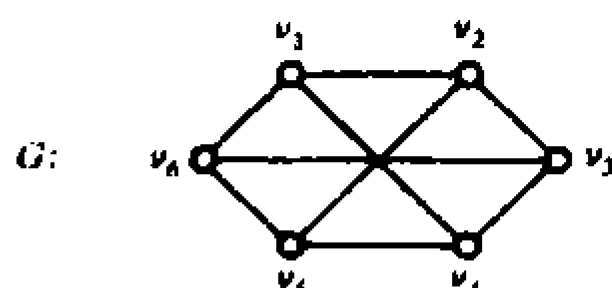


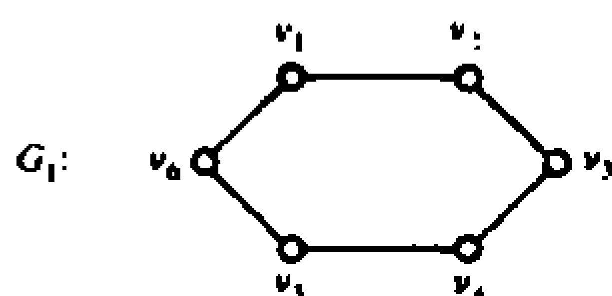
$G \cong G$

图 .15

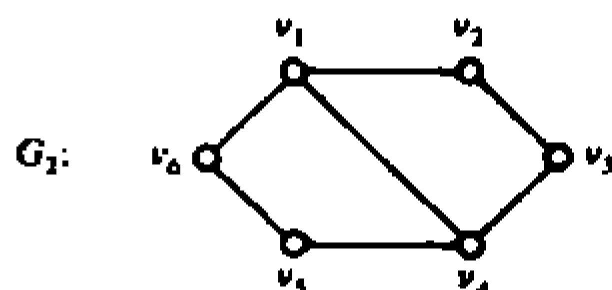
确定图 5.15 的图 G 是否为可平面的。首先，G_1 是指定的 5-圈，平面子图 $\hat{G}_1$ 有四个片 F_1，F_2，F_3 和 F_4。序列 $\hat{G}_i$ $(1\leq i\leq 7)$)(这是不唯一的) 连同关于 G 中 G_2 的每个片 F 的集 $\mathscr{R}(F,\ \hat{G}_2)$ 在图 5.15 中都表示出来。因为 $G\cong G_7$，所以 G 是可平面的。

对于图 5.16 的图 G，给出了平面子图序列，G_1，G_2，G_3。因为 $\mathscr{R}(F_6,G_3)=\varnothing$，所以 G 是不可平面的(实际上 $G\cong K_{3,3}$)。

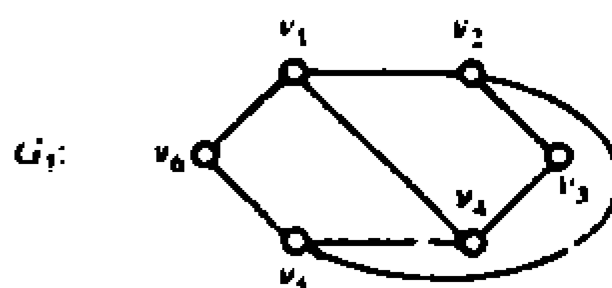




$F_1=(\{v_1v_4\})$, $F_2=(\{v_2v_5\})$, $F_3=(\{v_3v_6\})$
$|R(F_i,\ G_1)|=2\ (i=1,2,3)$



$F_4=(\{v_2v_3\})$, $F_5=(\{v_3v_6\})$
$|R(F_i,\ G_2)|=1\ (i=4,5)$



$F_6=(\{v_3v_6\})$
$|R(F_6,\ G_3)|=0$

图 5.16

这个算法是一个好算法。由算法过程可知，主要的运算包括：

(i) 找出图 G 的一个圈 G_1；

(ii) 确定 G 中 G_i 的所有片以及它们对于 G_i 的接触顶点；

(iii) 对于$\hat{G}_i$ 的每一个面，确定它们的边界；

(iv) 对于 G_i 的每一个片 F，确定 $\mathscr{R}(F,\hat{G}_i)$；

(v) 在 G_i 的某一个片 F 中，求连接 $V(F,\hat{G}_i)$ 中两个顶点的一条路 P_i。

由于上述过程的每一个运算都存在好算法，从而整个算法是好算法。

练习

1. 设 T 是阶至少为 4 的树，$e_1,e_2,e_3 \in E(\overline{T})$，证明：$T+e_1+e_2+e_3$是可平面的。

2. 运用算法 5A，

(a) 通过取 G_1 为 K_5 的一个 4-圈，试验证：K_5 是不可平面的。

(b) 取 G_1 是右图 G 的圈 $v_1v_2v_3v_4v_6v_1$，试验证：图 G 是可平面的。

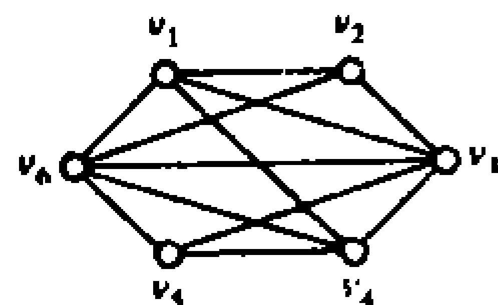


图 G

3. 如果图 G 存在平面嵌入使得 G 的每一个顶点落在外面的边界上，则称 G 是外可平面的。证明：

(a) 图 G 是外可平面的当且仅当 $G+K_1$ 是可平面的。

(b) 图 G 是外可平面的当且仅当它不含与 K_4 或与 $K_{2,3}$ 同胚的子图。

(c) 如果 G 是外可平面的(p,q) 图且 $p\geq 2$，那么 $q\leq 2p-3$。

4. (a) 证明：对于 K_5 的任意一条边 e，K_5-e 是可平面图。

(b) 证明：对于 $K_{3,3}$ 的任意一条边 e，$K_{3,3}-e$ 是可平面图。

5.3 不可平面图

有许多种方法来度量一个图是如何不可平面的。下面将讨论其中几种"度量"方法。

当然，不可平面图是不能嵌入平面的，所以只要一个不可平面图在平面上"画出来"，那么它的某些边必然会交叉，这个相当简单的道理提示了下面概念。

设 G 是一个图。如果将图 G 在平面上画出来，则 G 的某些边可能出现交叉。在 G 的所有平面画法中，边交叉的最少次数称为 G 的叉数，记为 $\upsilon(G)$。在对于图的叉数作进一步讨论以前，首先对图的"平面画法"作一些说明。规定图的平面画法满足下列条件：

(a) 两条邻接的边不能交叉。

(b) 两条不邻接的边最多交叉一次。

(c) 所有的边不能自身交叉。

(d) 任意两条以上的边不能交叉在平面的同一点上。

(e) 对应于一条边的连续曲线不经过其它不是该边端点的顶点所对应的点。

还可作出进一步说明，显然图 G 是可平面的当且仅当 $v(G)=0$；如果 $G\subset H$，那么 $v(G)\leq v(H)$；如果 H 是从 G 同胚，那么 $v(G)=v(H)$。有一些图的叉数已经知道，特别对于完全图，Bla žek，Koman 和 Guy 证明了：

$$v(K_p)\leq \frac{1}{4}\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{p-2}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{p-3}{2}\right\rfloor, \tag{5.3}$$

而且 Guy 猜想：对于任意的 p，(5.3) 式都是等式成立。就确切值来说，得到的最好结果如下：

定理 5.11 对任意 $1\leq p\leq 10$，

$$v(K_p)\leq \frac{1}{4}\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{p-2}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{p-3}{2}\right\rfloor。 \tag{5.4}$$

对 $1\leq p\leq 4$，因为 K_p 是可平面的，故对 $1\leq p\leq 4$，定理成立。又因为 K_5 是不可平面的，所以 $v(K_5)\geq 1$。另一方面存在一个 K_5 在平面上只有一个交叉点的画法（见图 5.17），所以 $v(K_5)=1$。

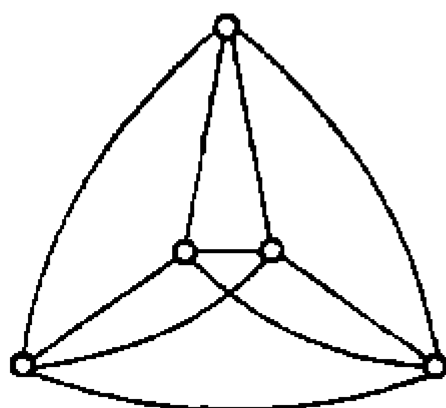


图 5.17 图 K_5 只有一个交叉点的画法

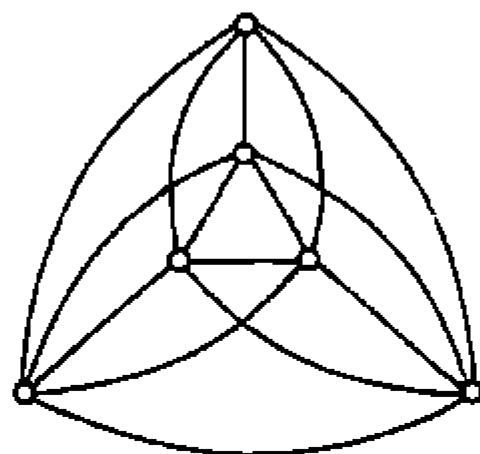


图 5.18 图 K_6 有三个交叉点的画法

因为在图 5.18 中给出了 K_6 有三个交叉点的画法，所以 $v(K_6)\leq 3$。下面证明 $v(K_6)\geq 3$。设已给了 K_6 在平面上有 $c=v(K_6)$ 个交叉点的画法，显然 $c\geq 1$，在每一个交叉点处引入一个新的顶点，由此得到了一个 $6+c$ 阶且有 $15+2c$ 条边的连通平面图。由推论 5.2a 可得：

$$15+2c\leq 3(6+c)-6,$$

所以 $c\geq 3$，从而 $v(K_6)=3$。

为了证明定理 5.11 中，对 $7 \leq p \leq 10$，结论成立，需要更特殊的一些技巧，在这里就不做详细叙述。

下面来考虑完全二部图的叉数。确定 $v(K_{m,n})$ 的问题有一段相当有趣的故事。有时候，确定 $v(K_{m,n})$ 的问题也称为 Turán-砖瓦厂问题(以 Paul Turán 命名)。下面一段文字引自 Anote of welcome. J. Graph Theory 1(1977)7-9。

我们在 Budapest 附近的一家砖瓦厂劳动。那里有一些制造砖块的窑和存放砖块的露天场地，所有砖窑都通过铁轨与所有存放场地相连接，且需要将砖头搬上小车，通过铁轨运到存放点。我们只要把砖窑的砖头搬上小车，然后把车推到存放点，最后在那里把砖头卸下。如果能合理地把握车的速度，这个工作本身并不很困难。麻烦发生在那些铁轨的交叉点处，一般车子在铁轨交叉点处会产生跳跃，导致砖头从车上掉下来，这总要引起一些麻烦，又浪费我们许多时间。由于我们全都很累，所以在这种情况下，感到很厌倦，我也一样。对我来说自然产生了这样的想法，如果能设法减少铁轨的交叉点，那么就能减少时间的浪费，但最小的交叉点数是多少呢？几天后我认识到，对于这种具体情况不难改进，但是对有 m 个砖窑和 n 个存放点的一般问题，求出确切的解看来似乎困难……。再次遇到这个问题是在我首次访问波兰的时候，在那里我碰到了 Zarankiewicz，我向他提到了我的"砖瓦厂"问题……而 Zarankiewicz 认为这个问题已经解决了，但 Rinel 发现在他发表的证明中有一个错误，迄今为止，尽管作了许多努力，但还没有能修补这个错误，从而这个问题也变成了著名的未解决难题……。

Zarankiewicz 认为，他已经证明了

$$v(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor. \tag{5.5}$$

但实际上，他证明了表达式(5.5)的右边是 $v(K_{m,n})$ 的一个上界，正像刚才指出的那样，P. C. Kainen 和 G. Ringel 两人发现 Zarankiewicz 的证明中有错误，所以(5.5)自然只是个猜想。目前，已经得到的关于二部图的叉数的结果是：

定理 5.12 对 $1 \leq \min\{m, n\} \leq 6$，

$$v(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor. \tag{5.6}$$

因此从定理 5.12 可得出：对于任意 n，

$$v(K_{3,n}) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, v(K_{4,n}) = 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor,$$

$$v(K_{5,n}) = 4\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \text{和 } v(K_{6,n}) = 6\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

例如 $v(K_{3,3}) = 1$，$v(K_{4,4}) = 4$，$v(K_{5,5}) = 16$ 且 $v(K_{6,6}) = 36$。图 5.19 给出 $K_{4,4}$

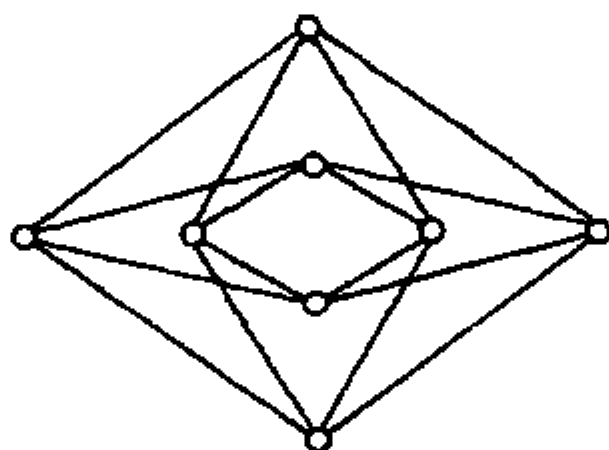


图 5.19 $K_{4,4}$ 有四个交叉点的画法

有 4 个交叉点的画法，因此叉数还未知的最简单完全二部图是 $K_{7,7}$，不过 Kleitman 已经证明 $\nu(K_{7,7})$ 是 77，79 和 81 中的某一个。

正像所想象的那样，关于 n-部图($n \geq 3$) 的叉数就更复杂了。对这种情况大部分只是知道它们的界，在某些很特殊的情况下，得到了确切的结果。另一方面，某些证明所使用的技巧很有启发性。作为例子，确定 $K_{2,2,3}$ 的叉数。

定理 5.13 $\nu(K_{2,2,3}) = 2$。

证明 设 $\nu(K_{2,2,3}) = c$。因为 $K_{3,3}$ 是不可平面的，且 $K_{3,3} \subset K_{2,2,3}$，故 $K_{2,2,3}$ 也是不可平面的，所以 $c \geq 1$。设存在 $K_{2,2,3}$ 在平面上的一个有 c 个交叉点的画法。在每个交叉点处，引入一个新的顶点，由此得到一个阶是 $p = c + 7$ 和 $q = 2c + 16$ 的连通平面图 G。根据推论 5.2a，$q \leq 3p - 6$。

设 u_1u_2 和 v_1v_2 是 $K_{2,2,3}$ 的两条不邻接的边，且在已给画法中它们交叉，从而产生了一个新的顶点，如果 G 是一个平面的三角剖分，那么 $C = u_1v_1u_2v_2u_1$ 是 G 的一个圈，这意味着 $K_{2,2,3}$ 中导出子图$\langle\{u_1, v_1, u_2, v_2\}\rangle$ 同构于 K_4。然而 $K_{2,2,3}$ 不包含这种子图。因此 G 不是一个三角剖分，所以 $q < 3p - 6$，即

$$16 + 2c < 3(7 + c) - 6,$$

从而得到 $c \geq 2$。不等式 $c \leq 2$ 可以从存在 $K_{2,2,3}$ 有两个交叉点的画法的事实中得到(见图 5.20)。■

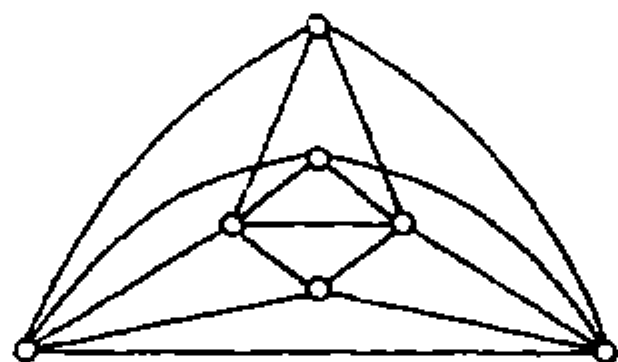


图 5.20 $K_{2,2,3}$ 有两个交叉点的画法

关于 n-立方图 Q_n 的叉数研究也取得了一定进展。由于当 $n = 1,2,3$ 时，n-立方图 Q_n 为可平面图，所以 $\nu(Q_n) = 0(n = 1,2,3)$；当 $n = 4$ 时，Eggleton 和 Guy 得到 $\nu(Q_4) = 8$；而当 $n \geq 5$ 时，$\nu(Q_n)$ 仍然没有得到。由于

$Q_4 = K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2 = C_4 \times C_4$，

所以 $\nu(C_4 \times C_4) = 8$，由这个结果引发了确定 $\nu(C_m \times C_n)$ 的问题，Harary，Kainen 和 Schwenk 得到 $\nu(C_3 \times C_3) = 3$。他们的证明过程主要包括以下三个步骤：

1. 找到了 $C_3 \times C_3$ 有 3 个交叉点的画法，从而说明 $\nu(C_3 \times C_3) \leq 3$；

2. 证明了对于 $C_3 \times C_3$ 的任意一条边 e，$C_3 \times C_3 - e$ 是不可平面图，从而

得到 $v(C_3 \times C_3) \geq 2$；

3. 采用分情况讨论的方法，说明不存在 $C_3 \times C_3$ 恰好有 2 个交叉点的画法，从而得到 $v(C_3 \times C_3) \geq 3$。

Ringeisen 和 Beineke 对于这一结果进行了更广泛的推广：对于任意的 $n \geq 3$，确定了 $v(C_3 \times C_n)$。

定理 5.14　对于任意 $n \geq 3$，

$$v(C_3 \times C_n) = n。$$

证明　首先，对于 $C_3 \times C_n$ 的所有顶点用 $3n$ 个有序对 $(0,j)$，$(1,j)$ 和 $(2,j)(0 \leq j \leq n-1)$ 进行标号使得：$\langle\{(i,j) \mid 0 \leq i \leq 2\}\rangle \cong C_3(0 \leq j \leq n-1)$ 且 $\langle\{(i,j) \mid 0 \leq j \leq n-1\}\rangle \cong C_n(0 \leq i \leq 2)$。为了叙述方便，令

$$u_j = (0,j), v_j = (1,j), w_j = (2,j)(0 \leq j \leq n-1) \text{ 且}$$
$$T_j = \langle\{u_j, v_j, w_j\}\rangle(0 \leq j \leq n-1)。$$

由于存在 $C_3 \times C_n$ 有 n 个交叉点的画法（图 5.21 给出了 $C_3 \times C_4$ 有 4 个交叉点的画法，而对于 $n \geq 5$ 时，可以类似得到 $C_3 \times C_n$ 有 n 个交叉点的画法），从而 $v(C_3 \times C_n) \leq n$。对 $n(n \geq 3)$ 归纳，证明：$v(C_3 \times C_n) \geq n$。

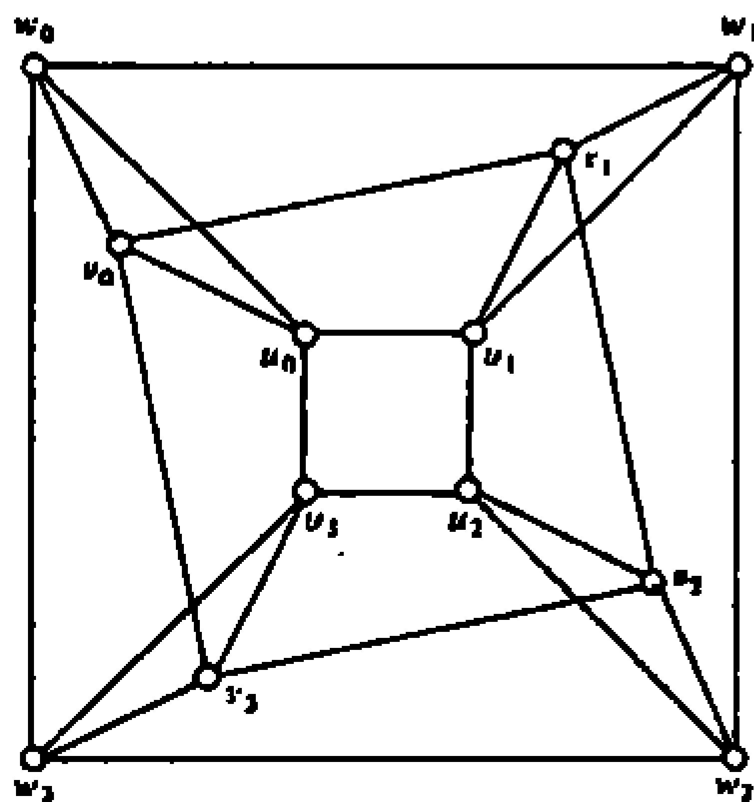


图 5.21　$C_3 \times C_4$ 有 4 个交叉点的画法

当 $n = 3$ 时，由前面提到的结果 $v(C_3 \times C_3) = 3$ 可得 $v(C_3 \times C_3) \geq 3$ 成立。假设当 $n = k(k \geq 3)$ 时，$v(C_3 \times C_k) \geq k$ 成立。下面分两种情况证明当 $n = k+1$ 时，$v(C_3 \times C_{k+1}) \geq k+1$ 成立。设给定 $C_3 \times C_{k+1}$ 有 $v(C_3 \times C_{k+1})$ 个交叉点的画法。

情况 1　$\bigcup_{i=0}^{k} E(T_i)$ 中任意两条边不交叉。令

$$H_j = \langle\{u_j, v_j, w_j, u_{j+1}, v_{j+1}, w_{j+1}\}\rangle(0 \leq j \leq k),$$

其中下标按模 $k+1$ 加法运算。

如果对于任意 $0 \leq j \leq k$，H_j 中至少有两条边参与了交叉或者一条边参与了至少两次交叉，由于在 $C_3 \times C_{k+1}$ 的画法中，每次交叉恰好有两条边参与，则在给定画法中交叉点的个数不小于 $k+1$，即 $v(C_3 \times C_{k+1}) \geq k+1$ 成立。从

而可假设存在$0\leq j\leq k$使得H_j的所有边不参与交叉或者最多有唯一的一条边仅参与了一次交叉。由假设可知，H_j的任意两条边不交叉，即在给定画法中H_j为平面图（见图5.22）。

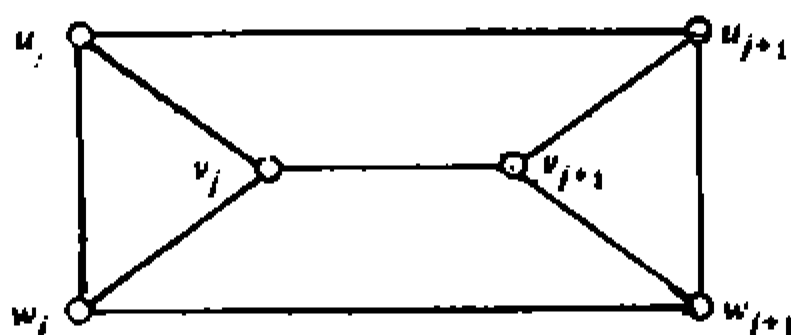


图5.22 H_j的平面画法

下面考虑T_{j+2}的画法。由假设可知，T_{j+2}一定画在H_j的某个面内。如果T_{j+2}画在H_j的一个三角形面内，不妨设在T_j内，则圈$u_0u_1\cdots u_ku_0$和$v_0v_1\cdots v_kv_0$均存在一条边与T_j的边交叉，与对H_j的假设矛盾。由此可得，T_{j+2}位于H_j的四边形面内，不失一般性，假设T_{j+2}位于边界是$u_ju_{j+1}w_{j+1}w_ju_j$的面内，则圈$v_0v_1\cdots v_kv_0$与面的边界至少交叉两次，与对H_j的假设矛盾。从而总有$v(C_3\times C_{k+1})\geq k+1$。

情况2 存在$0\leq i<j\leq k$使得T_i和T_j中的边交叉。由于$H=C_3\times C_{k+1}-E(T_j)$为$C_3\times C_k$插入3个2度顶点得到的图，所以由归纳假设可知$k\leq v(C_3\times C_k)=v(H)$。又因为$T_i$和$T_j$在给定画法中对应两条Jordan曲线，所以它们至少有两个交叉点，即在$C_3\times C_{k+1}$的画法中删除T_j的边后得到H的一个画法，且交叉点至多有$v(C_3\times C_{k+1})-2$个，所以$v(C_3\times C_{k+1})\geq k+2$，与$v(C_3\times C_{k+1})\leq k+1$矛盾。■

关于$C_m\times C_n$的叉数，仅有另一个由Beineke和Ringeisen给出的结果。

定理5.15 对于任意$n\geq 4$，

$$v(C_4\times C_n)=2n。$$

定理5.15的证明与定理5.14的证明类似，略去。

同时Beineke和Ringeisen给出了图$K_4\times C_n$的叉数公式。

定理5.16 对于任意$n\geq 3$，

$$v(K_4\times C_n)=3n。$$

除了叉数以外，当应用到不可平面图时，另外一些由Prior定义的拓扑参数也是很有意义的。下面介绍一类与Prior定义的参数非常相似的参数。

设P是一个图的给定性质，G为一个给定图，如果存在$V(G)$的一个划分$\mathscr{F}=\{V_i|1\leq i\leq n\}$满足对于任意$1\leq i\leq n$，$G$的导出子图$\langle V_i\rangle$具有性质$P$，则称$\mathscr{F}$为$G$关于$P$的顶点覆盖，且称所有$G$关于$P$的顶点覆盖的最小基数为$G$关于$P$的顶点覆盖数。与之相反，如果存在$V(G)$的一个划分$\mathscr{F}=\{V_i|1\leq i\leq n\}$满足对于任意$1\leq i\leq n$，$G$的导出子图$\langle V_i\rangle$不具有性质$P$，则称$\mathscr{F}$为$G$关于$P$的顶点装填，且称所有$G$关于$P$的顶点装填的最大基数为$G$关于$P$的顶点装填数。类似地，如果考虑$E(G)$的一个划分，则可得到图$G$关于性质$P$

的边覆盖、边覆盖数、边装填和边装填数。

在前几章中，已经遇到过这种参数的类似例子。例如：非空图 G 的荫度 $a'(G)$ 就是 G 关于无圈的边覆盖数，而 G 的点荫度 $a(G)$ 就是 G 关于无圈的顶点覆盖数。覆盖问题也可以理解为：利用具有某一性质 P 的子图覆盖 $V(G)$ 或者 $E(G)$，而且要求使用的顶点（或者边）不交子图个数尽可能的少，这类问题就称为最小覆盖问题；而装填问题可以理解为：从图 G 中最多可以取出多少个顶点（或者边）不交的不具有性质 P 的子图，换句话说，可以向给定图中最多装填多少个顶点（或者边）不交的不具有性质 P 的子图，这就是最大装填问题。事实上，我们称最大装填问题为最小覆盖问题的对偶问题。与图的荫度对偶的问题为图 G 关于无圈的最大边装填问题，即对于给定图 G，能够装填到 G 中边不交的包含圈的最多子图个数，称为 G 的圈重数，并记作 $\overline{a'}(G)$。正像所预料的那样，对于任意图的圈重数的公式至今没有发现，不过当 $G \cong K_p$ 和 $G \cong K_{m,n}$ 时，已经得到 $\overline{a'}(G)$ 的公式。对于顶点圈重数的公式在完全图和完全二部图的情况是很容易得到的。事实上，存在一个任何完全 n- 部图的一个公式。

引发上类参数的另一个性质是可平面性。非空图 G 的边厚度（或简称为厚度）是 G 关于可平面性的边覆盖数 $\theta'(G)$，即 $\theta'(G)$ 是边不交的、可平面的、覆盖 $E(G)$ 的子图的最小个数，这提供了图的不可平面性的另一个度量方法。当然完全图，完全二部图将再次受到人们的关注。

由于 Beineke，Harary，Alekseev，Vasak 和 Gonchakov 等人的努力，已经建立了完全图的厚度公式。

定理 5.17 K_p 的厚度为：

$$\theta'(K_p) = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{p+7}{6} \right\rfloor & p \neq 9,10 \\ 3 & p = 9,10. \end{cases}$$

不过对完全二部图的厚度只存在部分结果。另外由 Kleinert 得到了关于 n- 立方图 Q_n 的厚度。

定理 5.18 n- 立方图 Q_n 的厚度为：

$$\theta'(Q_n) = \left\lceil \frac{n+1}{4} \right\rceil.$$

图 G 关于可平面性的顶点覆盖数称为点厚度，记为 $\theta(G)$。关于这个参数目前了解甚少。图 G 的关于可平面性的边装填数用 $\overline{\theta'}(G)$ 表示，称为 G 的糙度。在糙度方面的研究已经取得了一些成绩。

练习

1. 在平面上画出有九个交叉点的 K_7。

2. 在不使用定理 5.12 的情况下确定 $v(K_{3,3})$。

3. 证明：$v(K_{7,7}) \leq 81$。

4. 确定 $v(K_{2,2,2})$ 和 $v(K_{1,2,3})$。

5. 证明：$\theta'(K_p) \geq \left\lfloor \frac{p+7}{6} \right\rfloor$ 对于 $p = 4,5,6,7,8$。

5.4 图的亏格

现在引入涉及到不可平面图的一个最著名参数，如果一个曲面 S 可以看做一个放上几个"柄"的球面或者等价于打穿几个"洞"的一个球面，则称曲面 S 为紧致可定向 2-流形，且柄（或洞）的个数称为这个曲面的亏格，记为 $g(S)$。由于有 q 条边的图能嵌入亏格为 q 的曲面，所以对于任意图 G，存在曲面 S 使得 G 可以嵌入曲面 S。图 G 的亏格 $g(G)$ 定义为所有 G 可嵌入的曲面 S（紧致可定向 2-流形）的亏格的最小值。又因为在球面和平面上，图的嵌入是等价的，所以亏格为零的图恰好是平面图，因此亏格为 1 的图是能在环面上嵌入的不可平面图。不可平面图 K_5 和 $K_{3,3}$ 的亏格为 1，图 5.23(a) 和(b) 表示了环面上和亏格为 2 的曲面上 $K_{3,3}$ 的嵌入。

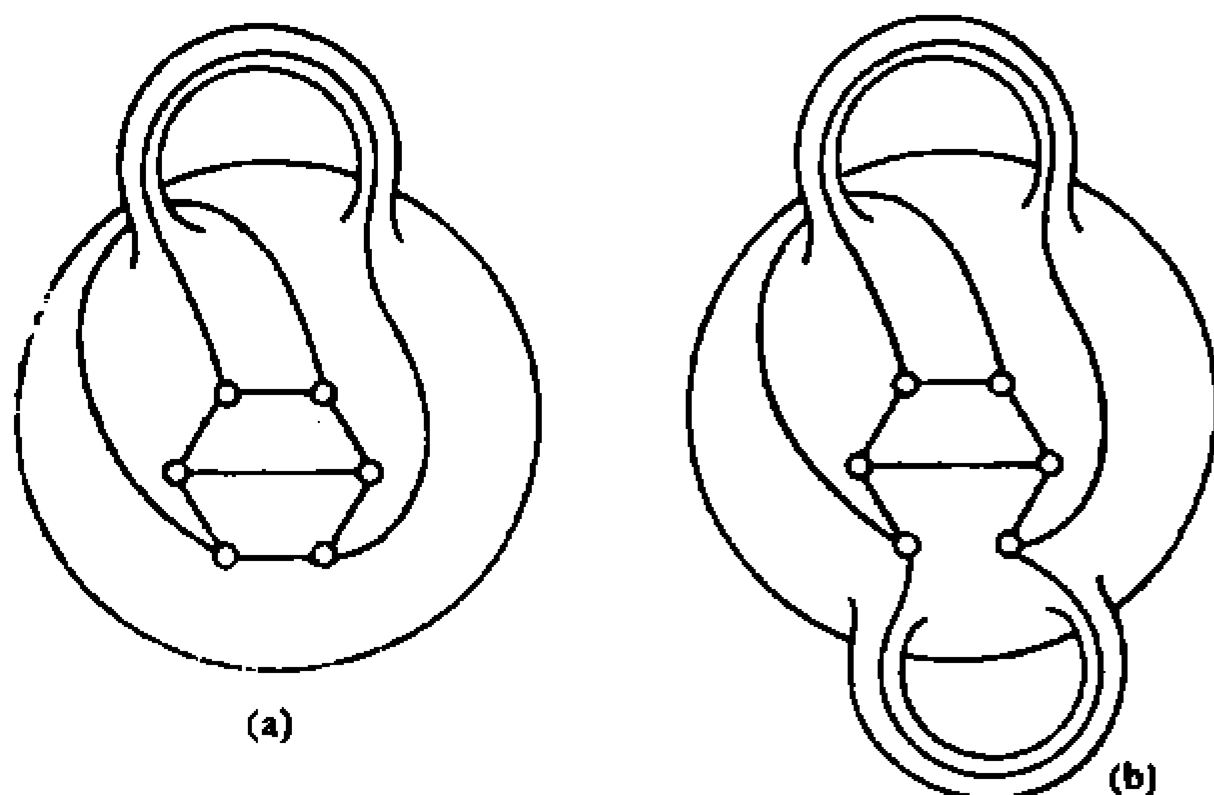


图 5.23 $K_{3,3}$ 在亏格为 1 和 2 的曲面上嵌入

不仅是 K_5 能嵌入环面，而且 K_6 和 K_7 也能嵌入环面，但 K_8 是不能在环面上嵌入的。图 5.24 给出 K_7 在环面上的一个嵌入。由于环面可以通过重合矩形的对边而得到，所以 K_7 的顶点标号为 $v_0, v_1, v_2, \cdots, v_6$，且标号在矩形的角上的

“顶点”，实际上代表 K_7 的同一顶点，即标号为 v_5 的顶点。

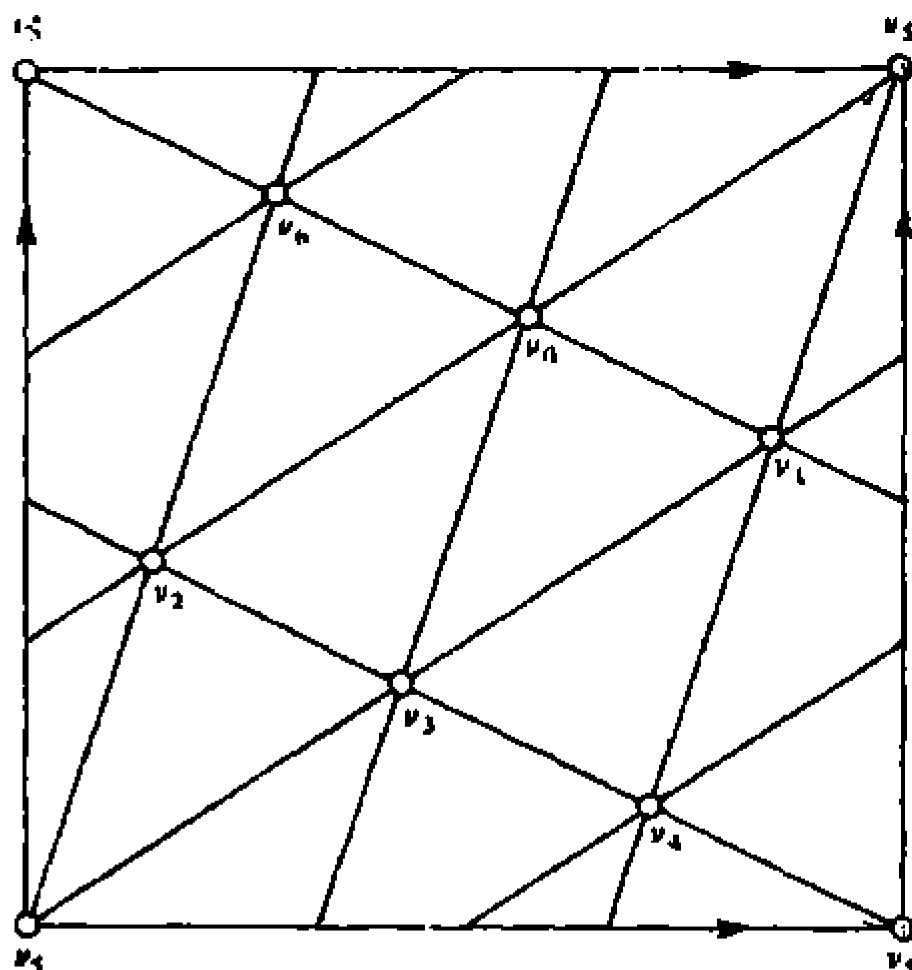


图 5.24 K_7 在环面上的嵌入

对于嵌入正亏格曲面上的图，面和面的边界可以与图嵌入平面时类似的定义。因此，如果图 G 嵌入曲面 S，那么 $S-G$ 的每一个连通部分就是嵌入的一个面，在图 5.23(a) 中有三个面，图 5.23(b) 中有两个面而在图 5.24 中有 14 个面。

设 G 嵌入曲面 S，且 R 为 G 的一个面，如果对于 R 内的任意一条连续的封闭曲线 C，曲线 C 能连续地变形或收缩为一个点，则称面 R 为 2-胞腔的。事实上，面是 2-胞腔的等价于它是拓扑同胚于 2-维欧几里得空间。虽然能够嵌入球面的连通图的每个面都是 2-胞腔的，但对嵌入正亏格曲面的连通图就不一定所有面是 2-胞腔的。例如，在图 5.23(b) 中，$K_{3,3}$ 在“双重环面”上嵌入确定的二个面中，边界是 4-圈的面是 2-胞腔的而另一个边界由 $K_{3,3}$ 的全部点和所有边组成的面恰好不是 2-胞腔的。

设 G 嵌入曲面 S，如果 G 的每一个面是 2-胞腔的，则称 G 为在曲面 S 上的 2-胞腔嵌入。图 5.23(a) 和图 5.24 是两个 2-胞腔嵌入。

为了把定理 5.1 推广到正亏格的曲面上，我们需要考虑伪图，即容许图 G 中包含两个端点相同的边（称为环），重边（两个顶点之间有一条以上的边连接）以及重环，事实上一个伪图 G 的边集 $E(G)$ 是一个可重复集，且每一个元

素为 $V(G)$ 的可重复二元子集。

定理 5.19 设 G 是一个连通的 (p,q) 伪图且在一个亏格为 n 的曲面上存在有 r 个面的 2-胞腔嵌入，那么

$$p - q + r = 2 - 2n。\tag{5.6}$$

证明 对 n 进行归纳。当 $n = 0$ 时，G 为连通可平面的伪图。如果 G 不含重边和环，则由定理 5.1 可知结论成立。如果 G 包含重边或者环，令 H 表示删除 G 的所有重边和环得到的图，则 H 为连通可平面图。设 H 的顶点数，边数和面数分别为 p_1，q_1 和 r_1，则由定理 5.1 可得 $p_1 - q_1 + r_1 = 2$。在 H 的平面嵌入 $\hat{H}$ 中，逐步添加删除的边或者环，就可得到伪图 G 的一个平面嵌入 $\hat{G}$。由于每添加一条重边或者环，面数就增加 1，所以当 G 比 H 多了 k 条边时，$p = p_1$，$q = q_1 + k$ 且 $r = r_1 + k$。由此可得

$$p - q + r = p_1 - (q_1 + k) + (r_1 + k) = p_1 - q_1 + r_1 = 2,\tag{5.7}$$

所以对 $n = 0$，结果成立。

假设在亏格为 $n - 1 (n > 0)$ 曲面上，对所有连通伪图的 2-胞腔嵌入，定理结论成立。

设曲面 S 的亏格为 $n(n > 0)$，连通 (p,q) 伪图 G 存在一个在 S 上的 2-胞腔嵌入，且面数为 r。因为 $n > 0$，所以 S 至少有一个环柄。在 S 的一个环柄上画一条环绕该环柄的封闭曲线 C 使得 C 不含 G 的顶点，则 C 一定与 G 的某一条边相交，否则 C 位于 G 的一个面内并且不能在该面内收缩到一点，与 G 在 S 上的嵌入是 2-胞腔嵌入矛盾。如果必要的话，通过在 S 上 G 的重新嵌入，可以假设 C 与 G 的边相交的总次数是有限的，比方说是 k 次，其中 $k > 0$。如果 $e_1, e_2, \cdots, e_m$ 是与 C 相交的 G 的边，那么 $1 \leq m \leq k$（见图 5.25）。如果边 $e_i (1 \leq i \leq m)$ 与 C 相交的次数为 l_i，那么

$$\sum_{i=1}^{m} l_i = k。$$

在 C 与 G 的边的 k 次相交中，每一个交点处加入一个新的顶点，将 C 落在两个连续新顶点之间的部分作为一条新边，同时如果 G 的一条边与 C 相交 l 次，那么这条边由新顶点分成的 $l + 1$ 段也作为新边。设由上述过程得到的新伪图为 G'，G' 有 p' 个顶点，q' 条边和 r' 个面。因为有 k 个新顶点加入得到 G'，所以 $p' = p + k$。又因为曲线 C 使边的条数增加了 k 条，同时对每条边 $e_i (1 \leq i \leq m)$ 也引起了 l_i 条边增加，且 $\sum_{i=1}^{m} l_i = k$，从而由 G 得到 G' 总共加入的边数是 $2k$，即 $q' = q + 2k$。

由于 G' 中从 C 增加的边位于 G 的某个面内，因此，每增加一条这样的边

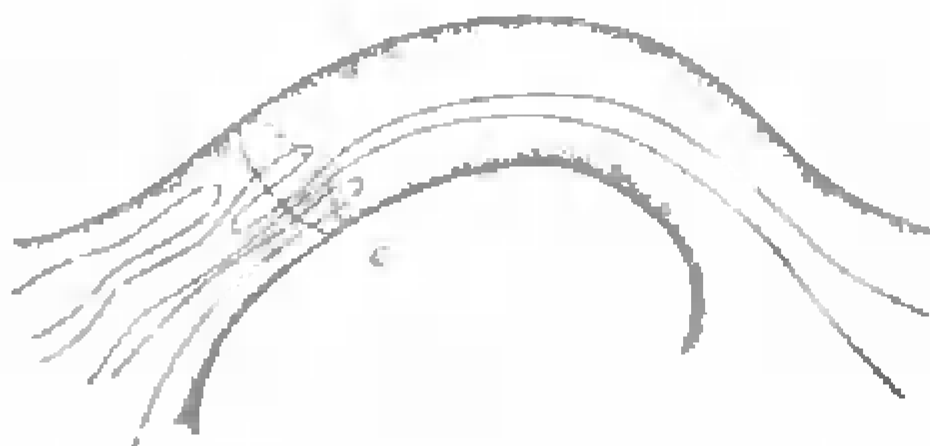


图5.25 画在曲面S的一个环柄上一条封闭曲线C

就把原来的一个面分成二个面。因为存在k条这样的边，所以$r' = r + k$。由于G的每个面都是2-胞腔的，所以G'的每个面也是2-胞腔的。

现在沿C切断这个环柄，这个柄被分成二段（如图5.26所示），然后"补上"或"盖上"产生的二个洞，在每种情况中产生了一个新的（2-胞腔）面（这称为"覆盖"运算）。



图5.26 盖上了一个切口的环柄

在施行这个覆盖运算的过程中，图的结构也发生了一些变化。首先，曲面S已经转变成一个新曲面S'，S的环柄的二个切面现在成了S'的球面部分，且S'比S少了一个环柄，所以S'的亏格为$n-1$。此外，伪图G'本身也已经改变。由曲线C产生的顶点和边分成2个复制品，分别在二个盖柄上。如果H代表这个新的伪图，那么H的阶数为$p_1 = p' + k = p + 2k$，边数为$q_1 = q' + k = q + 3k$，而面数是$r_1 = r' + 2 = r + k + 2$。因为，在连通伪图H的给定嵌入中，所有r_1个面都是2-胞腔的，根据归纳假设可得$p_1 - q_1 + r_1 = 2 - 2(n-1)$，即

$$(p + 2k) - (q + 3k) + (r + k + 2) = 2 - 2(n-1),$$

因此$p - q + r = 2 - 2n$，得到所要的结果。■

由于一般的图是伪图的特殊情况，所以定理5.18对于一般图也成立。

推论5.19 设G是一个连通的(p,q)图，在亏格为n的曲面上有一个2-胞腔嵌入，并有r个面，那么

$$p - q + r = 2 - 2n$$

与推论 5.18 密切相关的是下面结果，这个定理的证明本质上是严格拓扑的，这里省略了证明。

定理 5.20 如果 G 是一个连通图且嵌入在亏格为 $g(G)$ 的曲面上，则 G 的每个面是 2- 胞腔的。

现在由推论 5.18 和定理 5.19 立即得出下面结果。

定理 5.21 如果 G 是一个连通的 (p,q) 图，嵌入在亏格为 $g(G)$ 的曲面上且有 r 个面，那么

$$p - q + r = 2 - 2g(G)$$

利用定理 5.20，能得到一个重要的结论：任意连通图 G 在亏格为 $g(G)$ 的曲面上的任意两个嵌入产生同样的面数。由刚才得到的这个结论，能够得到连通图用阶数和大小表示的亏格的一个下界。

定理 5.22 如果 G 是一个连通 (p,q) 图 $(p \geq 3)$，那么

$$g(G) \geq \frac{q}{6} - \frac{p}{2} + 1$$

证明 对于 $p = 3$ 这个结果是显然的，所以可假设 $p \geq 4$。设 G 嵌入亏格为 $g(G)$ 的曲面上，由定理 5.20，$p - q + r = 2 - 2g(G)$，其中 r 是 G 的面数。由定理 5.20 可知，嵌入一定是 2- 胞腔嵌入，从而每个面的边界至少包含三条边，且每一条边至多包含在二个面的边界上，所以 $3r \leq 2q$，故

$$2 - 2g(G) = p - q + r \leq p - q + \frac{2q}{3}$$

从上式中解出 $g(G)$ 即可得到所需的结果。■

由于还没有得到任意图亏格的一般计算公式，下面的结果意味着亏格的计算只与块的亏格计算有关，从而只要研究块的亏格计算即可。我们省略这个定理的证明。

定理 5.23 如果 G 是一个有块 $B_1, B_2, \cdots\cdots, B_n$ 的图，那么

$$g(G) = \sum_{i=1}^{n} g(B_i)。$$

像通常那样，当关于任意图的一个参数值的一般公式不存在时，人们总要去寻求某类图的公式（或部分公式），通常首先考虑的总是完全图和完全二部图这种特殊类型的图，对此亏格也不例外。

1968 年，Ringel 和 Youngs 完成了历史上著名的一个结果的证明。他们解决了著名的 Heawood 地图染色问题。这个问题以后还将提及，这个解涉及到一个完全图的亏格公式猜想证实。该定理的证明可参考由 Ringel 所著的书。

定理 5.24（Ringel 和 Youngs） 完全图的亏格公式是

$$g(K_p)=\left\lceil\frac{(p-3)(p-4)}{12}\right\rceil \qquad (p\geq 3)$$

另外，Ringel 得到了完全二部图的亏格公式。

定理 5.25（Ringel） 完全二部图的亏格公式是：

$$g(K_{m,n})=\left\lceil\frac{(m-2)(n-2)}{4}\right\rceil \qquad (m,n\geq 2)$$

练习

1. 不使用定理 5.24 确定 $n=g(K_{4,4})$ 并且给出 $K_{4,4}$ 在亏格 n 的曲面上的一个 2- 胞腔嵌入的所有面。

2. (a) 对任意图 G，证明：$g(G)\leq \upsilon(G)$。

(b) 证明：对任意整数 n，存在一个图 G 使得 $g(G)=1$ 且 $\upsilon(G)=n$。

3. 证明：$g(K_p)\geq\left\lceil\frac{(p-3)(p-4)}{12}\right\rceil \qquad (p\geq 3)$。

4. 证明：$g(K_{m,n})\geq\left\lceil\frac{(m-2)(n-2)}{4}\right\rceil \qquad (m,n\geq 2)$。

5. (a) 求出 $g(K_{3,3}+\overline{K_n})$ 的界。

   (b) 确定当 $n=1,2$ 和 3 时，$g(K_{3,3}+\overline{K_n})$ 的确切值。

6. 证明：对任意正整数 n，存在一个亏格为 n 的连通图。

6 独立集，覆盖和支配集

这一章将讨论图G的顶点集$V(G)$和边集$E(G)$中一些和$V(G)$、$E(G)$自身元素密切相关的子集以及由这些子集所产生的一些重要参数。

6.1 匹配

在图G中，如果两个不同顶点或边在G中是不邻接的，则称它们是独立的。G的互相独立的边子集称为G的匹配（或G的边独立集），而具有最大基数的匹配就称为最大匹配，在图6.1的图G中，边集$M_1 = \{e_2, e_4\}$是匹配但不是最大匹配，而$M_2 = \{e_1, e_3, e_5\}$和$M_3 = \{e_1, e_3, e_6\}$是G的最大匹配。

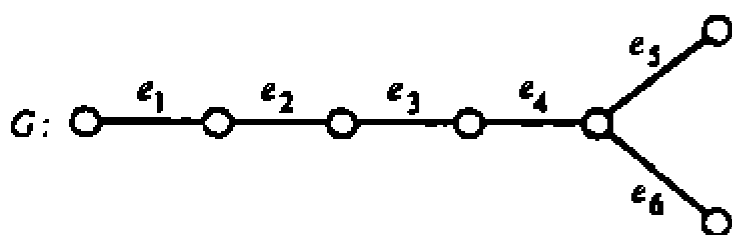


图6.1 匹配与最大匹配

如果M是图G的匹配且G的每个顶点都与M的某条边关联，那么称M是G的完美匹配。显然，如果G存在完美匹配M，那么G是偶阶图，且$\langle M\rangle$是G的1-正则生成子图。因此，图6.1中的图不可能存在完美匹配。

下面的问题都和求图的最大匹配有关。

在1941年第二次世界大战期间，英国皇家空军每架战斗机都需要两名飞行员，但由于某些飞行员的语言不同或者训练技术的因素不能组合在同一架战斗机中，试问能同时起飞的战斗机的最多架次是多少？

又如截角棋盘问题：考虑截去左上角和右下角各一个小方格的8×8棋盘，如果有三十一块多米诺牌，且每块牌只能覆盖棋盘上的两个相邻小方格，试问能否用三十一块多米诺牌覆盖所有62个小方格？而在第一章第一节中提到的岗位应聘问题，则是求二部图的最大匹配问题。

为了给出最大匹配的特征，需要引入一些新的术语。设M是图G的匹配，那么G的每个顶点最多与M的一条边关联。与M的某条边关联的顶点称为M顶点，否则称为$\overline{M}$顶点。如果P是G的一条路，且在P中，M的边和$E(G)\backslash M$

的边交替出现，则称 P 是 G 的一条 M- 交错路。如果 M- 交错路 P 的两个端点都是 $\overline{M}$ 顶点，则称 P 为 M- 可扩路。如果 A 和 B 为两个集合，则 $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ 称为 A 和 B 的对称差。下面的定理将是有用的。

定理 6.1 设 M_1 和 M_2 是图 G 的两个不同匹配，G 的边导出子图 $\langle M_1 \triangle M_2 \rangle$ 的任意分支一定是边交错地属于 M_1 和 M_2 的偶圈，或者是边交错地属于 M_1 和 M_2 的路。

证明 设 $H = \langle M_1 \triangle M_2 \rangle$，则 $\delta(H) \geq 1$。由于 M_1 和 M_2 是 G 的匹配，所以同时属于 M_1 或者 M_2 的任意两条边不邻接，从而 H 的任意顶点 v 至多与一条 M_1 的边关联，同时也至多与一条 M_2 的边关联，即 $\deg_H(v) \leq 2$，由此可得 $\Delta(H) \leq 2$，故 H 的每个分支或者是一条路或者是一个圈。由匹配的定义可知 H 的任意两条邻接边一定分别属于不同的匹配 M_1 和 M_2，从而每条路或者圈的边交错地属于 M_1 和 M_2 且每个圈是偶圈。■

Berge 在 1957 年，以及 Norman 和 Rabin 在 1959 年分别得到了匹配是最大匹配的充要条件。

定理 6.2 图 G 的匹配 M 是最大匹配当且仅当 G 中不包含 M- 可扩路。

证明 利用反证法。设 M 是 G 的最大匹配，且 G 中存在 M- 可扩路 P。由于 P 的两个端点都是 $\overline{M}$ 顶点，从而 P 的长为奇数。令 $M' = M \triangle E(P)$，则 M' 是 G 的匹配，且 $|M'| = |M| + 1$。与 M 是 G 的最大匹配矛盾，从而当 M 是 G 的最大匹配时，G 中不存在 M- 可扩路。

利用反证法证明定理的充分性，假设 M 是 G 的匹配，并且 G 中不存在 M- 可扩路，但是 M 不是 G 的最大匹配。设 M' 是 G 的最大匹配，则 $|M| < |M'|$。令 $H = \langle M \triangle M' \rangle$，则 H 中至少存在一个分支 H_1 使得 $|M \cap E(H_1)| < |M' \cap E(H_1)|$。由定理 6.1，$H_1$ 是一条奇长的 M'- 交错路，从而 H_1 是 M- 可扩路，与 G 不包含 M- 可扩路矛盾。■

根据定理 6.2，如果给定匹配 M，则通过确定 G 是否存在 M- 可扩路，就有可能确定 M 是否是最大匹配。

在应用方面，二部图的最大匹配是很有用的，下面的结果本身也是很有趣的。

设 G 是任意图，U_1 和 U_2 是 $V(G)$ 的两个不交的非空子集，且 M 是 G 的匹配，如果对于任意 $u \in U_1$，存在 $e = uv \in M$ 使得 $v \in U_2$，且对于 U_2 的任意顶点也有类似的结果，则称在匹配 M 下 U_1 匹配到 U_2。设 U 是图 G 的顶点子集，至少与 U 中一个顶点邻接的全部顶点构成的集称为 U 的领域，记为 $N(U)$，并称 $N[U] = N(U) \cup U$ 为 U 的闭邻域。

定理 6.3 设 G 是具有部分集 X 和 Y 的二部图，则存在 G 的匹配 M 使得

在 M 下 X 匹配到 Y 的某个子集当且仅当对于任意 $S \subseteq X$，

$$|S| \leq |N(S)|。$$

证明 假设在匹配 M 下 X 匹配到 Y 的某个子集，那么对 X 的任意子集 S，在 M 下 S 匹配到 Y 的某个子集 T。由于 $|S| = |T|$ 且 $T \subseteq N(S)$，所以 $|N(S)| \geq |S|$。

利用反证法证明定理的充分性。假设 G 是二部图，对于 X 的任意子集 S，$|S| \leq |N(S)|$，且不存在 G 的匹配 M 使得在 M 下 X 匹配到 Y 的子集。选取 G 的最大匹配 M，由假设可知存在 X 的顶点 v 是 $\overline{M}$ 顶点。令 U 为可以由 G 的一条 M- 交错路连接到 v 的全部顶点构成的顶点子集。因为 M 是最大匹配，由定理 6.2 可得 v 是 U 中唯一的 $\overline{M}$ 顶点。

设 $S = U \cap X$ 且 $T = U \cap Y$。根据 U 的定义以及 $U \backslash \{v\}$ 中没有 $\overline{M}$ 顶点，在 M 下 $S - \{v\}$ 匹配到 T，因此 $|T| = |S| - 1$ 且 $T \subseteq N(S)$。又因为对于任意 $w \in N(S)$，G 中存在一条 M- 交错路连接 v 和 w，所以 $N(S) \subseteq T$，故 $N(S) = T$，从而 $|N(S)| = |T| = |S| - 1 < |S|$，与定理条件矛盾。■

由定理 6.3 可以推出众所周知的 Hall 定理。设 $S_1, S_2, \cdots, S_n (n \geq 1)$ 是一组有限非空集，如果存在不同元素的集合 $\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ 使得对任意 $1 \leq i \leq n$，$s_i \in S_i$，则称 $\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ 为有限非空集组 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 的不同代表集。

定理 6.4 有限非空集组 $S_1, S_2, \cdots, S_n (n \geq 1)$ 存在不同代表集当且仅当对任意 $1 \leq k \leq n$ 及集合组中的任何 k 个集，它们的并集至少包含 k 个不同元素。

证明 根据有限非空集组 $S_1, S_2, \cdots, S_n (n \geq 1)$ 构造二部图 G 如下：(i) $X = \{x_i | 1 \leq i \leq n\}$，$Y = \{y_i | 1 \leq i \leq m = |\bigcup_{i=1}^n S_i|\}$ 且存在一一映射 $f: Y \to \bigcup_{i=1}^n S_i$；(ii) $E(G) = \{x_i y_j | f(y_j) \in S_i\}$。因为对 X 的任意子集 S，

$$|N(S)| = |\bigcup_{x_i \in S} S_i|,$$

所以有限非空集 $S_1, S_2, \cdots, S_n (n \geq 1)$ 存在不同代表集当且仅当 G 存在匹配 M 使得在 M 下 X 匹配到 Y，当且仅当对于任意自然数 k 以及集合组中的任意 k 个集合，它们的并集至少包含 k 个不同元素。■

上述讨论直接与一个很有趣的组合问题 —— 婚姻问题有关。在一个乡村里有一批小伙子和姑娘，每个姑娘认识某几个小伙子，问在什么条件下能够使所有姑娘同她认识的某个小伙子结合呢？关于这一点，定理 6.4 可以改述为：

如果有 n 个姑娘，那么婚姻问题有解当且仅当对任意 $k (1 \leq k \leq n)$ 个姑娘，至少与其中一位姑娘认识的小伙子的数目至少是 k。

改述后的定理 6.4 通常称为 Hall 婚姻定理。

在前面已经得到：如果 M 是图 G 的完美匹配，那么 $\langle M\rangle$ 是 G 的 1- 正则生成子图。图 G 的任何生成子图称为 G 的因子，G 的 k- 正则因子称为 k- 因子，这样 F 是图 G 的 1- 因子当且仅当 $E(F)$ 是 G 的完美匹配。确定已知图是否含有 1- 因子是一个十分受人注意的问题。设 H 为图 G 的连通分支，如果 H 的阶为奇数，则称 H 为 G 的奇分支，且 G 的所有奇分支的个数称为奇分支数，记为 $o(G)$。1947 年，Tutte 得到包含 1- 因子的图的特征刻画。

定理 6.5(Tutte) 图 G 存在 1- 因子当且仅当对任意 $S\subseteq V(G)$，

$$o(G-S)\leq |S|。$$

证明 设 F 是 G 的 1- 因子且 W 为 $V(G)$ 的任意子集。对 $G-W$ 的任意奇分支 H，$E(H)\cap E(F)$ 不是 H 的完美匹配，从而至少存在 F 的一条边使得两个端点分别属于 $V(H)$ 和 W。又因为 $E(F)$ 为 G 的完美匹配，所以 $o(G-W)\leq |W|$，即定理的必要性成立。

当 $S=\varnothing$ 时，$o(G-\varnothing)=o(G)\leq 0$，从而 G 只有偶分支且阶 p 为偶数，由此可得对 $V(G)$ 的任意子集 S，$o(G-S)$ 与 $|S|$ 有相同的奇偶性。

对正偶数 p 进行归纳。当 $p=2$ 时，如果 G 是 p 阶图使得对 $V(G)$ 的任意子集 S，$o(G-S)\leq |S|$，则 $G\cong K_2$，从而 G 存在 1- 因子。

假设对于阶数小于 p(p 是不小于 4 的偶数) 的全部偶阶图 H，如果对 $V(H)$ 的任意子集 W，$o(H-W)\leq |W|$，那么 H 存在 1- 因子。设 G 是任意 p 阶图，并且对 $V(G)$ 的任意子集 S，$o(G-S)\leq |S|$。下面分两种情况考虑。

情况 1 对 $V(G)$ 的任意子集 S，如果 $2\leq |S|<p$，则 $o(G-S)<|S|$。因为 $o(G-S)$ 和 $|S|$ 有相同的奇偶性，所以对所有满足 $2\leq |S|<p$ 的 $V(G)$ 的任意子集 S，$o(G-S)\leq |S|-2$。设 $e=uv\in E(G)$，并且考虑图 $G-u-v$。由于对 $V(G-u-v)$ 的任意子集 T，$o(G-u-v-T)=o(G-(T\cup\{u,v\}))\leq |T\cup\{u,v\}|-2=|T|$，且 $G-u-v$ 的阶数为 $p-2$，所以由归纳假设可得 $G-u-v$ 存在 1- 因子 F'，从而 $\langle E(F')\cup\{uv\}\rangle$ 为 G 的 1- 因子。

情况 2 存在 $V(G)$ 的子集 R 使得 $o(G-R)=|R|$ 且 $2\leq |R|<p$。不妨设 S 为满足上述条件且基数最大的子集。令 $o(G-S)=|S|=n$ 且 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 为 $G-S$ 的奇分支。如果 G_0 是 $G-S$ 的偶分支且 $u_0\in V(G_0)$，那么 $o(G-(S\cup\{u_0\}))\geq n+1=|S\cup\{u_0\}|$。由定理条件 $o(G-(S\cup\{u_0\}))\leq |S\cup\{u_0\}|$，所以 $o(G-(S\cup\{u_0\}))=|S\cup\{u_0\}|$，与 S 的最大性矛盾，由此可得 $G-S$ 不存在偶分支。

对任意 $1\leq i\leq n$，令 $S_i=S\cap N(V(G_i))$，则 S_i 表示 S 中至少与 G_i 的一个顶点邻接的所有顶点构成的顶点子集。如果存在 $1\leq i\leq n$ 使得 $S_i=\varnothing$，则 G_i 是 G 的一个奇分支，与 G 不含奇分支矛盾，从而对任意 $1\leq i\leq n$，$S_i\neq\varnothing$。

对任意 $1 \le k \le n$ 以及 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 中的 k 个子集 $S_{a_i}(1 \le i \le k)$，记它们的并集为 T，由于 $G_{a_i}(1 \le i \le k)$ 为 $G - T$ 的奇分支，从而 $|T| \ge k$。由定理 6.4 可得，存在 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 的不同代表集 $\{v_i | 1 \le i \le n\}$，而且对任意 $1 \le i \le n$，存在 $u_i \in V(G_i)$ 使得 $u_i v_i \in E(G)$。令 $H_i = G_i - u_i (1 \le i \le n)$。

如果存在 $1 \le k \le n$ 以及 $V(H_k)$ 的子集 W 使得 $o(H_k - W) > |W|$，则由 $o(H_k - W)$ 与 $|W|$ 有相同的奇偶性可知 $o(H_k - W) \ge |W| + 2$。因此

$$\begin{aligned} o(G - (S \cup W \cup \{u_k\})) &= o(G_k - u_k - W) + o(G - S) - 1 \\ &\ge |S| + |W| + 1 = |S \cup W \cup \{u_k\}|, \end{aligned}$$

与 S 的最大性矛盾，从而对任意 $1 \le k \le n$ 以及 $V(H_k)$ 的任意子集 W 满足 $o(H_k - W) \le |W|$。由归纳假设可知，对任意 $1 \le i \le n$，子图 H_i 存在 1-因子 F_i。由此可得，$\langle (\bigcup_{i=1}^{n} E(F_i)) \cup \{u_i v_i | 1 \le i \le n\} \rangle$ 为 G 的 1-因子。

综上所述，在任何情况下，都可得到 G 的 1-因子，从而定理成立。■

如果 $G_1, G_2, \cdots, G_n (n \ge 2)$ 是图 G 边不交的因子且 $\bigcup_{i=1}^{n} E(G_i) = E(G)$，则记 $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$，并称 G 是 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 的边和，也称 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 是 G 的因子分解。如果 k 为自然数且对任意 $1 \le i \le n$，G_i 为 G 的 k-因子，则称 G 为可 k-因子分解的。根据可 k-因子分解的定义可知，对任意 k-正则图 G，G 当然包含 k-因子，从而也是可 k-因子分解的，特别在 $k = 1$ 时，1-正则图是可 1-因子分解的，下面主要讨论图的 1-因子分解问题。任意 2-正则图 G 包含 1-因子当且仅当 G 的每个分支是偶圈，从而包含 1-因子的 2-正则图是可 1-因子分解的。对于 3-正则图，并非所有 3-正则图都包含 1-因子。图 6.2 中的图就是 3-正则但不含 1-因子的图。

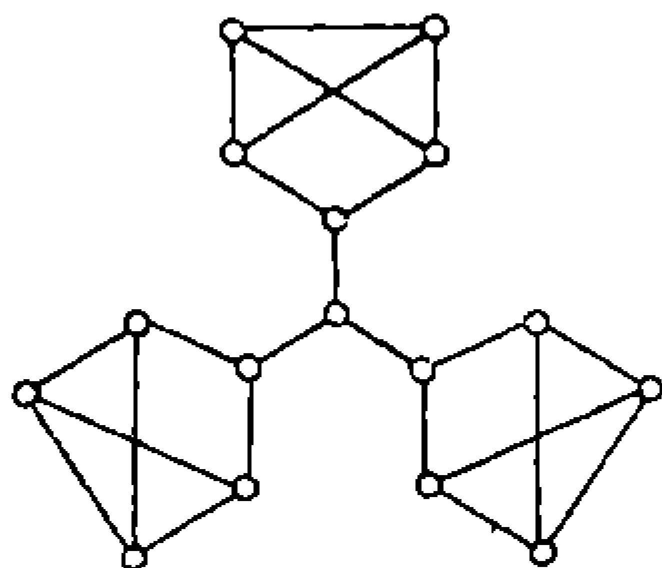


图 6.2 不包含 1-因子的 3-正则图

然而 Petersen 证明了不包含 1-因子的每个 3-正则图具有桥。

定理 6.6(Petersen) 每个无桥 3-正则图能表示为一个 1-因子和一个 2-因子的边和。

证明 由于任意 3-正则图取掉它的一个 1-因子后得到的图为 2-正则图，从而只要证明每个无桥 3-正则图 G 有 1-因子即可。假设无桥 3-正则图 G 没有 1-因子，那么由定理 6.5，存在 $V(G)$ 的子集 S 使得 $o(G - S) > |S|$。设 $k = |S|$ 且 $G_i(1 \le i \le n, n > k)$ 是 $G - S$ 的奇分支。如果存在 $1 \le i \le n$ 使得不存在连接 $V(G_i)$ 到 S 的边，则 G_i 是奇阶 3-正则图，与推论 1.1 矛盾，从而

对于任意 $1 \leq i \leq n$,至少存在奇数条边连接 $V(G_i)$ 到 S。又因为 G 没有桥,所以对于任意 $1 \leq i \leq n$,至少存在三条边连接 $V(G_i)$ 到 S,即连接 $\bigcup_{i=1}^{n} V(G_i)$ 到 S 的边数至少有 $3n$ 条。另一方面,由于 $|S| = k$ 且 S 的所有顶点为 3 度顶点,所以连接 $\bigcup_{i=1}^{n} V(G_i)$ 到 S 的边数最多有 $3k$ 条,即 $3k \geq 3n$,与 $n > k$ 矛盾。由此可得,对 $V(G)$ 的任意子集 S,$o(G-S) \leq |S|$。由定理 6.5,G 存在 1-因子。■

定理 6.6 说明每个无桥 3-正则图能分解成一个 1-因子和一个 2-因子。如果这个 2-因子能分解成两个 1-因子的边和,那么 G 是可 1-因子分解的。不过,并非每个无桥 3-正则图是可 1-因子分解的,Petersen 图就是包含 1-因子,又不存在 1-因子分解的无桥 3-正则图(见图 5.12a)。

关于图的 1-因子分解,对于二部图已经完全解决。

定理 6.7 任意非空的正则二部图是可 1-因子分解的。

证明 对非空的正则二部图的顶点度 $r(r \geq 1)$ 进行归纳。当 $r=1$ 时,结果显然成立。假设对度为 $r-1(r \geq 2)$ 的每个正则二部图 H,H 是可 1-因子分解的。设 G 是 r-正则二部图,X 和 Y 是 G 的部分集且 S 是 X 的任意子集。因为 G 是 r-正则的,所以与 S 的顶点关联的边数是 $r|S|$,且这些边也与 $N(S) \subseteq Y$ 的顶点关联。同理可得与 $N(S)$ 关联的边数为 $r|N(S)|$,故 $r|N(S)| \geq r|S|$,即 $|N(S)| \geq |S|$。由定理 6.3,存在 G 的匹配使得 X 匹配到 Y 的某个子集,即 $|X| \leq |Y|$。对 Y 进行类似讨论可得:存在 G 的匹配使得 Y 匹配到 X 的某个子集,即 $|Y| \leq |X|$。由此可得 $|X_1| = |Y_2|$ 且 G 有 1-因子 F。令 $H = G - E(F)$,则 H 为 $(r-1)$-正则二部图,由归纳假设可得 H 是可 1-因子分解的,从而,G 也是可 1-因子分解的。■

练习

1. 证明:树至多有一个完美匹配。

2. 两人在图 G 中做游戏。游戏规则是两个人交替地选择相异的顶点 v_0,v_1,…,使得对每个 $i > 0$,v_i 与 v_{i-1} 邻接,最后一个顶点的选择者得胜。证明:第一个选点人存在必胜策略的充要条件是 G 没有完美匹配。

3. 求 K_{2n} 和 $K_{n,n}$ 中不同完美匹配的个数。

4. 对每个大于 1 的正整数 k,找出没有完美匹配的 k-正则图的例子。

6.2 最大匹配的算法

在匹配的应用问题中,我们经常需要求出给定图的最大匹配或者满足某

些条件的最大匹配，从而需要考虑求出给定图的最大匹配的方法问题，即最大匹配的算法。对于二部图，在1931年，由匈牙利学者Egerváry给出了求最大匹配的算法，故通常称这个算法为匈牙利算法。

匈牙利算法的基本思想方法非常简单。设二部图 G 的部分集分别为 X 和 Y，从图 G 的任意匹配 M 开始，若 X 中的所有顶点是 M 顶点，则 M 就是最大匹配，算法结束。如果 X 中存在 $\overline{M}$ 顶点 u，则系统地寻找一条以 u 为起点的 M-可扩路，寻找的具体方法下面再详细叙述。如果找到了一条 M-可扩路 P，则 $M' = M \triangle E(P)$ 就是比 M 更大的匹配，利用 M' 代替 M，并重复这个过程。如果不存在以 u 为起点的 M-可扩路，则得到由 M-交错路连接到 u 的顶点子集 $S \cup T$ 使得 $S \subseteq X$ 且 $T \subset Y$。与定理6.3的证明类似可得：$N(S) = T$，$|N(S)| = |S| - 1$ 且在匹配 M 下 $S \setminus \{u\}$ 匹配得 T。由此可知在 M 的扩张过程中，一定不存在以 u 为端点的 M-可扩路，此时称 u 为检验过的 $\overline{M}$ 顶点。对 X 中其它未检验过的 $\overline{M}$ 顶点重复这个过程，直到 X 中的所有 $\overline{M}$ 顶点全部检验过为止。当整个过程结束时，由于 G 中不存在 M-可扩路，从而 M 为 G 的最大匹配。

设 M 是 G 的匹配，u 是 X 中的 $\overline{M}$ 顶点。若树 $H \subseteq G$ 满足：(i) $u \in V(H)$；(ii) 对 H 中的任意顶点 v，H 中唯一的 u—v 路是 M-交错路，则称 H 为根是 u 的 M-交错树。令 $S = \{v \in V(H) | d_H(u,v)$ 为偶数$\}$ 且 $T = \{v \in V(H) | d_H(u,v)$ 为奇数$\}$，则 $S = X \cap V(H)$ 且 $T = Y \cap V(H)$。在图6.3中给出了一个 M-交错树。

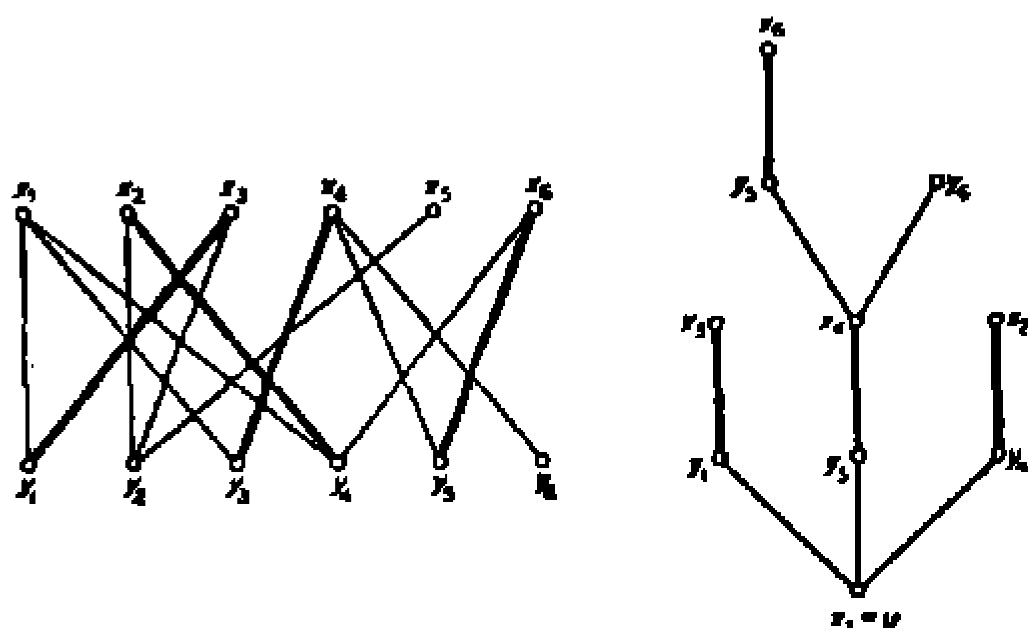


图 6.3　图 G 的匹配 M 及一个 M-交错树

寻找一条以 u 为起点的 M-可扩路的过程主要包括"生长"一个根为 u 的 M-交错树 H，从而匈牙利算法的核心是根为 u 的 M-交错树 H 的"生长"方法。如果根为 u 的 M-交错树 H 满足：

(a)$N(S)=T$，且

(b)$V(H)$ 中包含唯一的$\overline{M}$ 顶点 u，故 $|N(S)|=|S|-1$，即 H 无法再“生长”时，称 H 为一个匈牙利树。

现在我们讨论 M-交错树 H 的“生长”方法。在算法开始时，H 仅由顶点 u 组成，记$S=\{u\}$ 且$T=\varnothing$。在 H 的生长过程中，我们必须考虑以下两种情况：(i)$N(S)\neq T$ 或者(ii)$N(S)=T$。

如果情况(i) 出现，则存在 $y\in N(S)\backslash T$ 及 $x\in S$ 使得 $xy\in E(G)\backslash M$。当 y 是$\overline{M}$ 顶点时，将顶点 y 和边 xy 加入 H，此时 H 中唯一的 u—y 路为 M-交错路 P，用 $M'=M\triangle E(P)$ 代替 M，继续检验其它未检验的$\overline{M'}$ 顶点。当 y 是 M 顶点时，存在 $yz\in M$，此时必有 $z\notin S$，将顶点 y，z 和边 xy，yz 加入树 H，用 $S\cup\{z\}$ 代替 S，用 $T\cup\{y\}$ 代替 T，继续 M-交错树 H 的“生长”。

如果情况(ii) 出现，则得到一个以 u 为根的匈牙利树，说明 G 中不存在以 u 为端点的 M-可扩路，放弃顶点 u，对其它未检验的$\overline{M}$ 顶点继续这个过程。

由于图 G 的顶点集 $V(G)$ 为有限集，所以我们在 M-交错树的生长中，一定得到一条 M-可扩路或者得到一个匈牙利树，从而匈牙利算法必定有限步结束且得到图 G 的最大匹配。

算法 6A(匈牙利算法) 设 G 是部分集为 X 和 Y 的二部图，且 M 是 G 的已知匹配。

1. 令 $X'=\varnothing$。

2. 如果 $X\backslash X'$ 中不存在$\overline{M}$顶点，则算法结束。如果 $X\backslash X'$ 中存在$\overline{M}$ 顶点 u，则置 $S=\{u\}$，$T=\varnothing$ 且对顶点 u 标号为 $l(u)=u$。

3. 如果 $N(S)=T$，则用 $X'\cup\{u\}$ 代替 X'，删除顶点的所有标号，并转向第二步。

4. 如果 $N(S)\neq T$，则存在 $y\in N(S)\backslash T$ 及 $x\in S$ 使得 $xy\in E(G)$。

如果 y 是$\overline{M}$顶点，则将 y 标记为 $l(y)=x$。令 $v_0=y$，对任意 $0\leq k\leq n-1$，令 $v_{k+1}=l(v_k)$ 且 $v_n=u$，则路 $v_0v_1\cdots v_n$ 是一条 M-可扩路 P。用 $M\triangle E(P)$ 代替 M，删除所有的顶点标号，并转向第二步。

如果 y 是 M 顶点，则存在 $zy\in M$。用 $S\cup\{z\}$ 代替 S，用 $T\cup\{y\}$ 代替 T，将 y 标号为 $l\{y\}=x$，且 z 标号为 $l\{z\}=y$，并转向第三步，

说明：(a) 在算法 6A 中，根为 u 的 M-交错树 H 的边集利用顶点标号 $l(v)$ 表示，即 $w=l(v)$ 表示 $vw\in E(H)$；

(b) 由于在 M-交错树 H 的生长过程中，如果向 T 中添加顶点 y，则同时向S 中添加顶点 z 使得 $yz\in M$，所以在没有遇到其它的$\overline{M}$ 顶点以前，保持在匹配 M 下 T 匹配到 $S\backslash\{u\}$。

作为例子，考虑图6.4中的图G，并依$M=\{x_2y_2,x_3y_3,x_5y_5\}$为初始匹配。在图6.4中生长出一个以$x_1$为根的$M$-交错树，并得到一条$M$-可扩路$x_1y_2x_2y_1$，由此可得新的匹配$M'=\{x_1y_2,x_2y_1,x_3y_3,x_5y_5\}$。从$X$中唯一的$\overline{M'}$顶点$x_4$开始生长出一个$M'$-交错树，由于不存在$M'$-可扩路，算法停止。此时，$S=\{x_1,x_3,x_4\}$且$T=N(S)=\{y_2,y_3\}$，表明$M'$就是$G$的最大匹配。

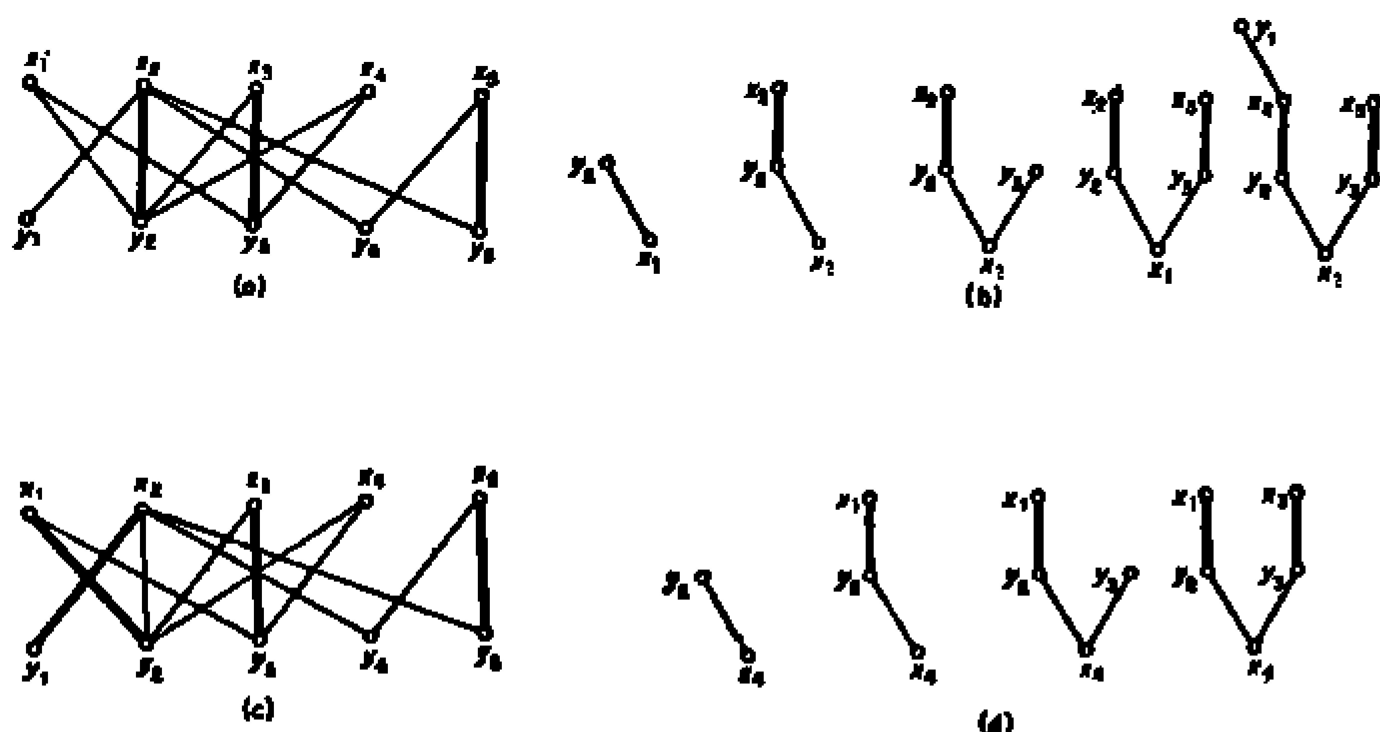


图6.4 二部图G的最大匹配计算过程

在1965年，Edmonds对匈牙利算法进行了修改使得修改后的匈牙利算法可以应用到一般图，从而得到了一般图求最大匹配的一个好算法。在介绍Edmonds的算法以前，需要介绍一些新的概念。

在二部图最大匹配的匈牙利算法中，由于$S\subseteq X$且$T\subseteq Y$，所以当$y\in N(S)\backslash T$时，$y\in Y$且$y\notin S$；当$yz\in M$时，$z\notin S\cup T$。由此可得所有S中的顶点由偶长的M-交错路连接到u，而所有T中顶点由奇长的M-交错路连接到u，且由二部图的结构特征保证$S\cap T=\varnothing$。设M为任意图G的匹配且u为$\overline{M}$顶点，如果$v\in V(G)$且存在偶长的M-交错路连接u到v，则称顶点v为S型顶点，类似由奇长的M-交错路连接到u的顶点称为T型顶点。在一般图中，由于不可能严格地区分S型顶点和T型顶点，所以可能出现某个顶点既是S型顶点，也是T型顶点，即在M-交错树的生长过程中，遇到了一个奇长圈。由此可知，在一般图中使用匈牙利算法必须克服奇长圈的问题。Edmonds对这个问题给出了很好的解决方法。

设M是图G的匹配，若C是G的奇长圈且$|M\cap E(C)|=(|V(C)|-1)/2$，则在$V(C)$中存在唯一的顶点$v$使得它在$C$中关联的两条边都不属于

M。如果 P 为一条偶长的 M-交错路使得 P 为与 C 内不交的 u—v 路且 u 为 $\overline{M}$ 顶点，则 $V(C)\setminus\{v\}$ 中的所有顶点既是 S 型顶点也是 T 型顶点，称由路 P 和奇圈 C 所构成的子图为 G 的花，称 C 为花苞，v 为花托，P 为花柄，且 u 为花根。设 B 为 G 的花，则由花根 u 到花苞中的任意顶点存在偶长的 M-交错路，且除花托 v 以外，花苞中的任意顶点存在奇长的 M-交错路连接到 u。

Edmonds 对匈牙利算法补充的核心为：如果在 M-交错树的生长中，一旦发现 G 的花 B，设 B 的花苞和花托分别为 C 和 v，则在图 G 中将 C(包含 v) 收缩为一个伪点 $w(w \notin V(G))$ 得到新图 G' 使得 $V(G') = (V(G)\setminus V(C)) \cup \{w\}$，$E(G') = E(G - V(C)) \cup \{wx \mid x \in V(G)\setminus V(C)$，且存在 $y \in V(C)$ 使得 $xy \in E(G)\}$。如果 B 的花根 $u \neq v$，则存在 $xv \in M$，令 $M' = (M \cap E(G')) \cup \{wx\}$，否则，令 $M' = M \cap E(G')$。用 M' 代替 M，用 G' 代替 G，令 w 为 S 型顶点，然后继续 M-交错树的生长。

根据上面说到的花的特点，若在收缩图中存在以花根 u 为端点的 M-可扩路，则不难看出，在 G 中也存在以 u 为端点的 M-可扩路。

有两点必须进行说明：第一，在 M-交错树的生长过程中，图的花出现有两种可能性，一种情况是 M-交错树中的两个 S 型顶点之间有非 M 的边连接，另一种情况是两个 T 型顶点之间有 M 的边连接。

第二，在算法的执行过程中，可能存在某个伪顶点又出现在另一个花的花苞中，因而，一般说来，伪顶点的内部可能包含另一个伪顶点，但是当将伪顶点还原到 G 时，每个伪顶点总对应 G 的奇阶子图。

算法 6B(Edmonds) 设 G 为任意的图，且 M 为 G 的已知匹配。

1.（初始化）置 $X = \varnothing$。

2.（初始化树）如果 $V(G)\setminus X$ 中的 $\overline{M}$ 顶点个数不超过 1，则 M 为 G 的最大匹配，算法结束，否则，任取 $V(G)\setminus X$ 中的 $\overline{M}$ 顶点 u，置 $S = \{u\}$，$T = \varnothing$，$G_0 = G$，$M_0 = M$ 且 $i = 0$。

3.（产生匈牙利树）如果 $N(S) = T$，则在 G_i 中不存在以 u 为端点的 M_i-可扩路。置 $X \cup \{u\}$ 为 X，放弃所有的收缩图，并返回第二步。

4.（检查树）如果 $N(S) \neq T$，则存在 $y \in N(S)\setminus T$ 及 $x \in S$ 使得 $xy \in E(G_i)$ 且 $xy \notin M_i$。

5.（收缩花）如果 $y \in S$，则得到 G_i 的花 B_i，收缩 B_i 的花苞 C_i 为伪点 w_i 得收缩图 G_{i+1}。置 $(S \cap V(G_{i+1})) \cup \{w_i\}$ 为 S，$T \cap V(G_{i+1})$ 为 T，$u_i = u$，且 M_{i+1} 为 M_i 在 G_{i+1} 中的对应匹配(如果 u_i 为 B_i 的花托，则 $M_{i+1} = M_i \cap E(G_{i+1})$，否则 $M_{i+1} = (M_i \cap E(G_{i+1})) \cup \{w_i x\}$，其中 $xv_i \in M_i$ 且 v_i 为 B_i 的花托)。利用 $i + 1$ 代替 i，并转向第三步。

6.（得到可扩路）如果 y 是 $\overline{M_i}$ 顶点，则得到 G_i 中以 u 为端点的 M_i- 可扩路 P_i。如果已知 G_j 中以 u 为端点的 M_j- 可扩路 $P_j(1 \leq j \leq i)$，则构造 G_{j-1} 中以 u 为端点的 M_{j-1}- 可扩路 P_{j-1} 如下：

如果 $w_{j-1} \notin V(P_j)$，则 P_j 就是 G_{j-1} 中以 u 为端点的 M_{j-1}- 可扩路 P_{j-1}，即令 $P_{j-1} = P_j$。

如果 $w_{j-1} \in V(P_j)$，则选取 $w_{j-1}x \in E(P) \backslash M_j$，$y \in V(C_{j-1})$ 使得 $xy \in E(G_{j-1})$，B_{j-1} 中连接 u 到 y 的偶长 M_{j-1}- 交错路 P' 及 P'' 为 P_j 中以 x 为端点且不包含 w_{j-1} 的子路，令 $P_{j-1} = P' + xy + P''$。

最后用 $M \triangle E(P_0)$ 代替 M，并转向第二步。

7.（树的生长）如果 y 是 M_i 顶点，则存在 $zy \in M_i$ 且 $z \notin S \cup T$。置 $T \cup \{y\}$ 为 T，$S \cup \{z\}$ 为 S，并转向第三步。

我们在前面已经介绍了 Edmonds 算法的主要思想，这里省略它的证明。作为例子可见图 6.5 中所示的图 G 以及最大匹配的计算过程。

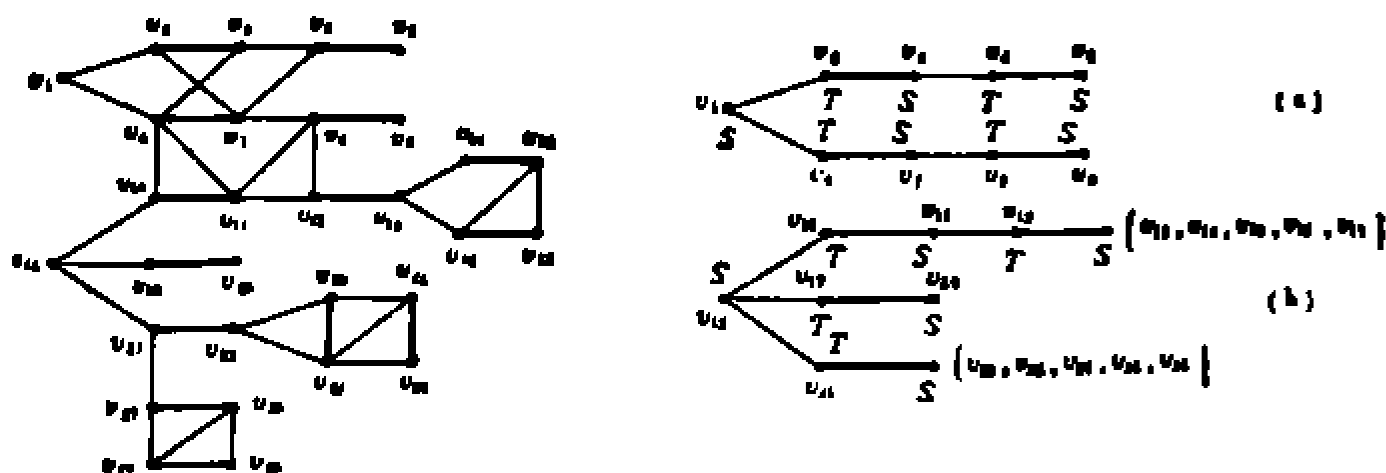


图 6.5　图 G 的最大匹配计算过程

练习

1. 求岗位应聘图(图 1.1) 的最大匹配。
2. 求正十二面体图的最大匹配。

6.3　覆　盖

如果图 G 的顶点子集 S 满足 S 中任意两个顶点不邻接，则称 S 为 G 的顶点独立集或者简称为独立集；基数最大的独立集称为 G 的最大独立集，且最大独立集的基数称为 G 的顶点独立数或独立数，记为 $\beta(G)$。图 G 的匹配也称为 G 的边独立集，且最大匹配的基数称为 G 的边独立数，记为 $\beta'(G)$，例如：如果

$m \leq n$，那么 $\beta(K_{m,n}) = n$，$\beta'(K_{m,n}) = m$。

如果图 G 的一个顶点和一条边是关联的，则称它们在图 G 中是彼此覆盖的。如果图 G 的顶点子集 S 使得对 G 的任意一条边，至少存在 S 中的一个顶点覆盖它，则称 S 为 G 的覆盖。显然，顶点集 $V(G)$ 是 G 的覆盖，如果 S 是覆盖，且对 G 的任何覆盖 S' 使得 $|S'| \geq |S|$，则称 S 为最小覆盖，且 $|S|$ 称为 G 的覆盖数，记为 $\alpha(G)$。类似地，可定义没有孤立顶点的图 G 的边覆盖，最小边覆盖和边覆盖数 $\alpha'(G)$。

设图 G 表示某个城市的地段，那末街道的交叉点和街道的端点就是 G 的顶点，而相邻两个交叉点或者端点之间的街道段就是 G 的边。如果希望在某些街道交叉点或者端点处配置一名交通警使得对城市的该地段任何位置，至少存在一名交通警能尽快地到达这个位置(不需要穿过其它的交叉点或端点)，即在每条街道段，希望至少在它的某个交叉点或端点处配置一名交警，那么所需最少交通警的个数就是 $\alpha(G)$。

在图 6.6 所示的要塞中，每个墙头都有一个灯塔。站在墙上的一名卫兵只能看到他所在墙的两头上的灯塔。为了看到全部灯塔需要卫兵的最少数是多少?因为相应的图的最小边覆盖为 7，所以有 7 名卫兵就足够了。

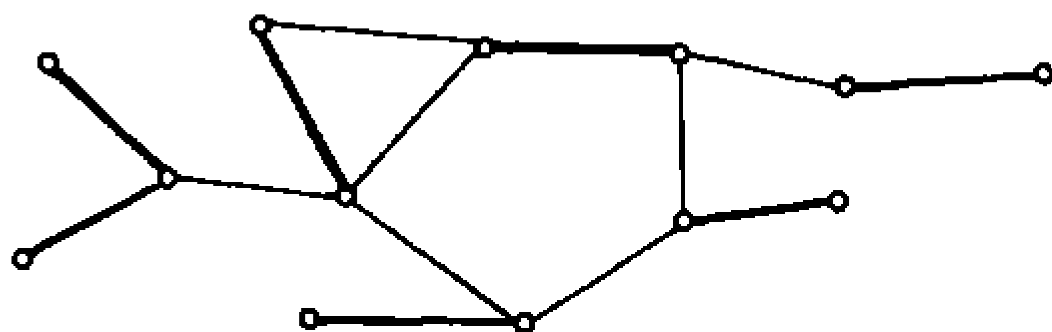


图 6.6 一个图的最小边覆盖

对于 $m \leq n$，$\alpha(K_{m,n}) = m$ 和 $\alpha'(K_{m,n}) = n$。

在考虑 4 个参数 $\alpha(G)$，$\alpha'(G)$，$\beta(G)$ 和 $\beta'(G)$ 之间的相互关系时，由于当 $p \geq 2$ 时，$\beta(K_p) = 1$，$\beta'(K_p) = \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil$，$\alpha(K_p) = p - 1$ 和 $\alpha'(K_p) = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$，所以对于上面的两类 p 阶图，即 $K_{m,n}(n + m = p)$ 和 K_p 可得

$$\alpha(G) + \beta(G) = \alpha'(G) + \beta'(G) = p。$$

由 Gallai 给出的定理说明对于任意没有孤立顶点的图，上式也成立。

定理 6.8 如果 G 是没有孤立顶点的 p 阶图，则

$$\alpha(G) + \beta(G) = p \tag{6.1}$$

且

$$\alpha'(G) + \beta'(G) = p。 \tag{6.2}$$

证明 首先证明(6.1)成立。设U是G的最大独立集，即$|U|=\beta(G)$。显然$V(G)-U$是G的覆盖，因此，$\alpha(G)\leq p-\beta(G)$。如果W是G的最小覆盖，那么$V(G)-W$是G的独立集，由此可得，$\beta(G)\geq p-\alpha(G)$，结合上述两个不等式，可得(6.1)成立。

最后证明(6.2)成立。设M是G的最大边独立集，即$|M|=\beta'(G)$，显然M覆盖了G的$2\beta'(G)$个顶点。对任意一个$\overline{M}$顶点，选择一条与它关联的边，并且定义M'是选择的所有边与M的并集，则M'是G的边覆盖，从而$|M'|\geq\alpha'(G)$。又因为$|M|+|M'|=p$，所以$\alpha'(G)+\beta'(G)\leq p$。设$M'$是$G$的最小边覆盖，即$|M'|=\alpha'(G)$。由$M'$最小性可得$\langle M'\rangle$的每个分支是树。从$\langle M'\rangle$的每个分支中任意选择一条边，用$M$表示由此所产生的边子集，则$M$是$G$的边独立集，从而$|M|\leq\beta'(G)$且$|M|$是$\langle M'\rangle$的分支数设$p_i(1\leq i\leq|M|)$是$\langle M'\rangle$各分支的阶则$\alpha'=|M'|=\sum_{i=1}^{|M|}(p_i-1)=p-|M|$，故$|M'|+|M|=p$，即$\alpha'(G)+\beta'(G)\geq p$，从而(6.2)成立。■

从上述论证可知匹配与边覆盖之间的关系并不像独立集与覆盖之间的关系那样简单。对于顶点集$V(G)$来说，独立集与覆盖是互余的集合，而对边集$E(G)$来说，匹配与边覆盖并不一定是互余的集合。

如果C是图G的覆盖且M是边独立集，那么对M的每条边e，存在C的顶点v_e与e关联。又因为对任意$e,f\in M$，由$e\neq f$可得$v_e\neq v_f$，所以$|C|\geq|M|$。由于G的覆盖C和边独立集M是任意选取的，所以$\alpha(G)\geq\beta'(G)$。

一般说来，上式中不一定等式成立，但是如果G是二部图，那么真像由König证明的那样，$\alpha(G)=\beta'(G)$。

定理 6.9(König) 如果G是二部图，则

$$\alpha(G)=\beta'(G)。$$

证明 因为对任意图G，$\alpha(G)\geq\beta'(G)$，所以只要证明$\alpha(G)\leq\beta'(G)$即可。设V_1和V_2是G的部分集且M是G的最大匹配，则$\beta'(G)=|M|$。用U表示V_1中全部$\overline{M}$顶点构成的顶点子集。如果$U=\varnothing$，则由V_1是G的覆盖可得$\alpha(G)\leq\beta'(G)$，结论成立，从而假设$U\neq\varnothing$。设S是可以由M-交错路连接到U的所有顶点构成的顶点子集，$W_1=S\cap V_1$且$W_2=S\cap V_2$，则由定理6.3的证明可知：在M下W_1-U匹配到W_2，且$N(W_1)=W_2$，从而$|W_1|-|W_2|=|U|$。

令$C=(V_1-W_1)\cup W_2$。如果存在G中边vw不是由C覆盖的，则$v\in W_1$且$w\notin W_2$，与S的取法矛盾。

从而C为G的覆盖。又因为$|M|=|V_1|-|U|$，所以

$$|C| = |V_1| - |W_1| + |W_2| = |V_1| - |U| = |M|,$$

即 $\alpha(G) \leq |C| = |M| = \beta'(G)$，定理结论成立。■

定理 6.10 如果 G 是无孤立顶点的二部图，则

$$\beta(G) = \alpha'(G)。$$

证明 设 G 是无孤立顶点的二部图，由定理 6.8 和定理 6.9，有

$$\alpha(G) + \beta(G) = \alpha'(G) + \beta'(G) \text{ 且}$$

$$\alpha(G) = \beta'(G),$$

所以 $\alpha'(G) = \beta(G)$。■

对于一般图，Weinstein 得到了边独立数的上界和下界。

定理 6.11 设 G 是没有孤立顶点的 p 阶图，那末

$$\left\lfloor \frac{p}{1+\Delta(G)} \right\rfloor \leq \beta'(G) \leq \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor,$$

且所有界都是可达的。

证明 设 M 为 G 的最大匹配，则 M 覆盖的顶点数为 $2\beta'(G)$，从而 $\beta'(G) \leq \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$，即边独立数的上界成立，且当 G 为完全图时，达到边独立数的上界。

下面对 $q(G)$ 归纳证明 $\beta'(G)$ 的下界成立。如果 $q = 1$ 或 $q = 2$，那么容易验证下界成立。假设对无孤立顶点的大小 q 不超过 $k(k \geq 2)$ 的任意图，边独立数的下界成立。设 G 是无孤立顶点的大小为 $q = k+1$ 的 p 阶图。如果 G 不连通，设 G_1 为 G 的一个分支，且 $G_2 = G - V(G_1)$，则

$$\beta'(G) = \beta'(G_1) + \beta'(G_2) \geq \frac{p(G_1)}{1+\Delta(G_1)} + \frac{p(G_2)}{1+\Delta(G_2)}$$

$$\geq \frac{p(G_1)}{1+\Delta(G)} + \frac{p(G_2)}{1+\Delta(G)} = \frac{p}{1+\Delta(G)},$$

所以

$$\beta'(G) \geq \left\lceil \frac{p(G)}{1+\Delta(G)} \right\rceil,$$

从而可假设 G 为连通图。

如果 G 存在圈边 e，则 $G - e$ 的大小为 k。由归纳假设可得：

$$\beta'(G) \geq \beta'(G-e) \geq \frac{p}{1+\Delta(G-e)} \geq \frac{p}{1+\Delta(G)},$$

即对包含圈的大小为 $k+1$ 的图，边独立数的下界成立。

假设 G 是树。如果 $G \cong K_{1,p-1}$，则 $\beta'(G) = p/(1+\Delta(G)) = 1$，这也说明了下界是可达的。如果 $G \ncong K_{1,p-1}$，由于 G 存在顶点 v 使得除一个顶点 u 外，$N(v)$ 中所有顶点为 G 的悬挂点，令 $G' = G - (N[v] \setminus \{u\})$，则对 G 的任意最大匹配 M，M 恰好包含 $E(G) \setminus E(G')$ 中的一条边。由归纳假设可得：

$$\beta'(G) = 1 + \beta'(G') \geq 1 + \frac{p(G')}{1 + \Delta(G')}$$

$$\geq 1 + \frac{p - \deg_G(v)}{1 + \Delta(G)} > \frac{p}{1 + \Delta(G)}。$$

综上所述，边独立数的下界成立，且是可达的。■

结合定理 6.8 和定理 6.11，可得下面的结果

推论 6.11 设 G 是没有孤立顶点的 p 阶图，则

$$\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil \leq \alpha'(G) \leq \left\lfloor \frac{p\Delta(G)}{1 + \Delta(G)} \right\rfloor,$$

且所有界是可达的。

对没有孤立顶点的 p 阶图 G，容易得到 $1 \leq \beta(G) \leq p - 1$，而且这些界是可达的，这意味着 $1 \leq \alpha(G) \leq p - 1$，且所有界也是可达的。

设 S 为 $V(G)$ 或 $E(G)$ 的子集且 P 为图的一个性质，如果 S 有性质 P，但对于任意 $S \subset T \subseteq V(G)$（或 $E(G)$），T 没有性质 P，则称 S 关于性质 P 是极大的；而 S 关于性质 P 是极小的，如果 S 有性质 P，但 S 的任意真子集没有性质 P。虽然与此类似的概念以前已经提到过，但这种思想在这一章将会以一种更系统的方式介绍。尤其是，对于某种性质 P，我们将对关于性质 P 的极大集或极小集的最大或最小基数感兴趣。

例如，在图 G 中最大基数的极大独立集称为最大独立集，最大独立集的基数称为 G 的独立数，且记为 $\beta(G)$。图 G 的极大独立集的最小基数称为 G 的下独立数，记为 $i(G)$。

对于二部完全图 $K_{s,t}(s < t)$，只有两个极大独立集，即 $K_{s,t}$ 的两个部分集，所以 $\beta(K_{s,t}) = t$ 且 $i(K_{s,t}) = s$。

类似地，在图 G 中，具有最大基数的极大匹配或极大边独立集就是 G 的最大匹配，最大匹配的基数称为 G 的边独立数 $\beta'(G)$。极大匹配的最小基数就是 G 的下边独立数，用 $i'(G)$ 表示。例如，对路 P_6，$\beta'(P_6) = 3$ 且 $i'(P_6) = 2$。下面给出的是有关极大边独立集的两个结果。

定理 6.12 对于每个非空图 G，$i'(G) \leq \beta'(G) \leq 2i'(G)$。

定理 6.13 设 G 是非空图。如果 k 是整数且 $i'(G) \leq k \leq \beta'(G)$，则 G 包含基数为 k 的极大匹配。

练习

1. 证明：图 G 是二部图当且仅当对 G 的每个子图 H，$\beta(H) \geq \frac{1}{2}|V(H)|$。

2. 设U是图G的顶点子集，利用定理6.5证明：G存在匹配覆盖U当且仅当对每个$V(G)$的子集S，只包含U的顶点的$G-S$的奇分支数不超过$|S|$。

3. 证明：定理6.12。

4. 证明：定理6.13。

5. 说明对极大独立集不存在类似于定理6.12和定理6.13的结果。

6. 刻画满足任意两个不同的极大独立集是不交的非空图的特征。

6.4 图的支配集

在图G中，称顶点v支配了它自己和它的领域里的每个点，即v支配它的闭邻域$N[v]$中的所有顶点。设S是G的顶点子集，如果G中每个顶点由S中的某个顶点支配，则称S是G的支配集。换句话说，如果S是G的支配集，那么$G-S$中每个顶点都至少与S中一个顶点邻接。G的所有支配集的最小基数称为G的支配数，记为$\gamma(G)$，且基数为$\gamma(G)$的支配集称为G的最小支配集。

在图6.7中，顶点子集$S_1=\{v_1,v_2,y_1,y_2\}$和$S_2=\{w_1,w_2,x\}$是图G的两个支配集，用黑圈表示。因为S_2是最小基数的支配集，所以$\gamma(G)=3$。

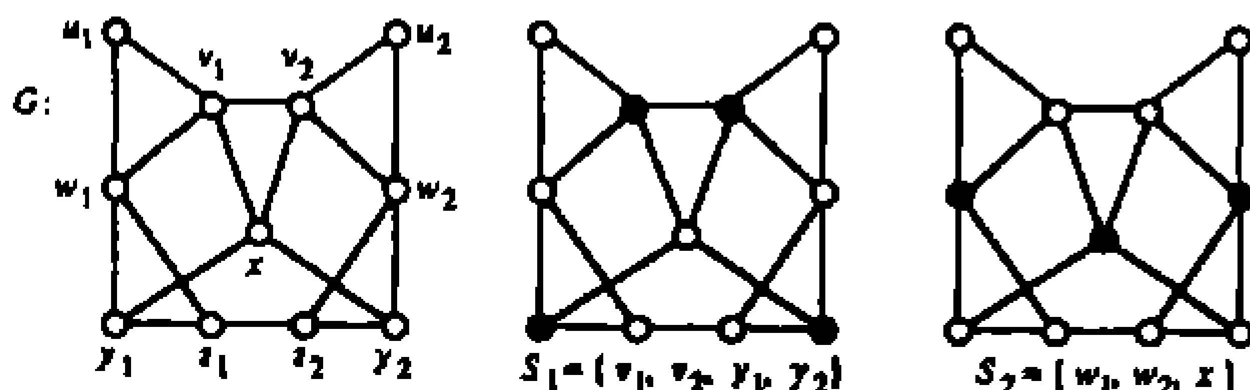


图6.7 支配集

在国际象棋的比赛中，首先出现了支配集的概念。棋赛的目的是用某些棋子覆盖或支配棋盘上的所有格子。1862年De Jaenisch考虑了控制整个棋盘所需要的最少的皇后个数问题(皇后能越过任何几个空格，沿水平线，垂直线或对角线移动。所谓控制整个棋盘是指每个格子或者已由某个皇后占领，或者可由某个皇后在一次移动以后占领)，这种皇后的最小个数是5。图6.8表示了5个皇后的一种放置办法。

如果两个皇后中一个皇后所在的格子能被另一个皇后经过一次移动后到达，那么称这两个皇后是相互攻击的，否则就是互不攻击的。显然，在图6.8中，棋盘上每对皇后是互相攻击的。如果棋盘上的每个格子总能被某个皇后到达而且这些皇后又是互不攻击的，那么这种皇后的最小个数是7。7个互不攻

击的皇后的一种可能摆放如图 6.9 表示。

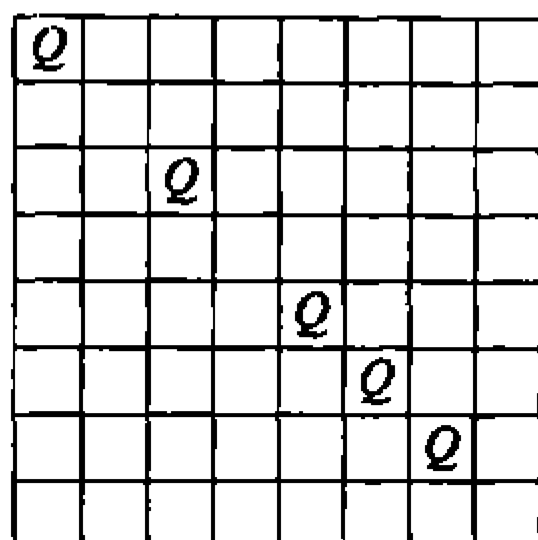


图 6.8 支配整个棋盘的皇后的最小数

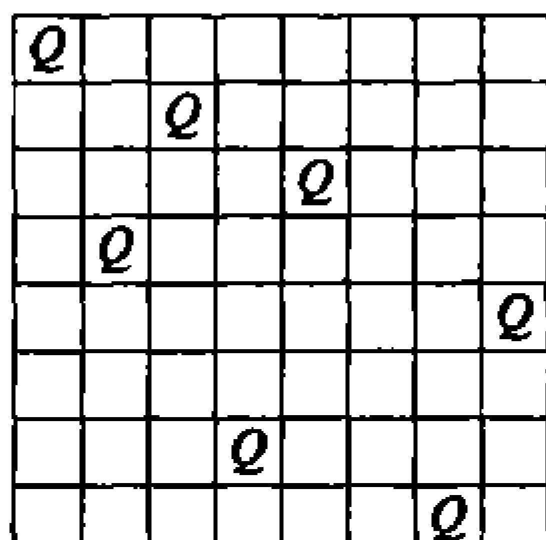


图 6.9 支配整个棋盘且互不攻击的皇后的最小数

上述棋盘问题和图的支配集之间有着直接的联系。将图 G 的顶点集与棋盘上的 64 个格子一一对应，且两个顶点在 G 中是邻接的当且仅当两个对应格子中的一个格子可以由位于另一个格子中的皇后控制，这个图就称为皇后图，那么支配棋盘中全部格子的皇后的最小个数就是 $\gamma(G)$。支配棋盘中全部方格的互不攻击的皇后的最小数就是 G 的独立支配集的最小基数。

如果图的支配集满足它的任意真子集不是图的支配集，则称它为图的极小支配集。当然，最小基数的极小支配集就是最小支配集，且基数为 $\gamma(G)$。在图 6.7 的图 G 中，集 $S_1=\{v_1,v_2,y_1,y_2\}$ 是极小支配集，但它不是最小支配集。Ore 刻划了极小支配集的特点。

定理 6.14 图 G 的支配集 S 是 G 的极小支配集当且仅当 S 中每个顶点 v 满足下列性质之一：

(i) 存在 $w\in V(G)-S$ 使得 $N(w)\cap S=\{v\}$； (6.3)

(ii) $S\cap N(v)=\varnothing$，即 S 中的所有顶点不与 v 邻接。 (6.4)

证明 首先，注意到如果 S 中每个顶点 v 至少满足(6.3)和(6.4)性质中一个，则 $S-\{v\}$ 就不是 G 的支配集，从而，S 是 G 的一个极小支配集。

反过来，假设 S 是 G 的极小支配集。那么，当然对每个 $v\in S$，集 $S-\{v\}$ 就不是 G 的支配集。所以存在顶点 $w\in V(G)-(S-\{v\})$ 使得没有 $S-\{v\}$ 中顶点与 w 邻接。如果 $w=v$，则 S 中没有顶点和 v 邻接。假设 $w\neq v$，因为 S 是 G 的支配集且 $w\notin S$，所以顶点 w 至少与 S 中一个顶点邻接。然而，w 不与 $S-\{v\}$ 中顶点邻接，从而，$N(w)\cap S=\{v\}$。■

Ore 的下列结果给出了在没有孤立顶点的图中极小支配集的补集的一个性质。

定理 6.15 如果 G 是没有孤立顶点的图，且 S 是 G 的极小支配集，那么 $V(G)-S$ 也是 G 的支配集。

证明 设 $v\in S$，则 v 至少具有定理 6.14 中(6.3)和(6.4)两个性质之一。首先假设存在顶点 $w\in V(G)-S$ 使得 $N(w)\cap S=\{v\}$，所以 v 邻接到 $V(G)-S$ 中某个顶点。其次假设 S 中没有顶点和 v 邻接，那么 v 是子图 $\langle S\rangle$ 中的孤立顶点，因为 v 在 G 中不是孤立点，所以顶点 v 邻接到 $V(G)-S$ 中某个顶点。这样 $V(G)-S$ 是 G 的支配集。■

对于没有孤立顶点的图 G，我们现在用 G 的阶来表示 $\gamma(G)$ 的上界。

推论 6.15 如果 p 阶图 G 无孤立顶点，则

$$\gamma(G)\leq\frac{p}{2}$$

证明 设 S 是 G 的极小支配集，由定理 6.15，$V(G)-S$ 也是 G 的支配集，这样有

$$\gamma(G)\leq\min\{|S|,|V(G)-S|\}\leq\frac{p}{2}\ ■$$

达到推论 6.15 中的界的许多图能用如下的算法产生。图 H 的冠 $\mathrm{Cor}(H)$ 是通过在 H 的每个顶点上添加一条悬挂边后产生的图。设 $G=\mathrm{Cor}(H)$，则 G 的阶 $p=2p(H)$ 为偶数，G 不含孤立顶点且 $\gamma(G)=\frac{p}{2}$。

事实上，Payna 和 Xuong 证明了结果：如果 p 阶图 G 不含孤立顶点且 $\gamma(G)=\frac{p}{2}$，则 G 的每个分支或者是 C_4，或者是某个连通图的冠。Bollobás 和 Cockayne 又证明了有关最小支配集的如下结果。

定理 6.16 如果图 G 不含孤立顶点，则存在 G 的最小支配集 S 使得对 S 的每个顶点 v，存在 $G-S$ 中的顶点 w 满足：$N(w)\cap S=\{v\}$。

证明 用反证法。在 G 的全部最小支配集中，设 S 是使 $\langle S\rangle$ 满足 $|E(\langle S\rangle)|$ 达到最大的一个最小支配集。假设定理结论不成立，S 至少包含一个不具有上述性质的顶点 v，即对任意 $w\in V(G)-S$，$N(w)\cap S\neq\{v\}$。由定理 6.14，v 是 $\langle S\rangle$ 的孤立顶点。又因为 S 为 G 的最小支配集，所以对任意 $w\in V(G)-S$，$N(w)\cap S\neq\varnothing$，即与 v 邻接的 $V(G)-S$ 中的每个顶点一定与 S 中的另外一个顶点邻接。由于 G 不含孤立顶点，所以 v 与 $V(G)-S$ 中的某个顶点 w 邻接，故 $(S-\{v\})\cup\{w\}$ 是 G 的最小支配集，且它的导出子图中至少包含一条与 w 关联的边，要比 $\langle S\rangle$ 中的边数多，与 S 的选取方式矛盾。■

我们也能够通过图 G 的阶和最大度给出 G 的支配数的界。下面定理中下界是由 Walikar，Acharga 和 Sampathkumar 得到的，而上界是 Berge 得到的。

定理 6.17 如果 G 是 p 阶图，则

$$\left\lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq p - \Delta(G)$$

证明 我们先证明下界，设 S 是 G 的最小支配集，则

$$V(G) - S \subseteq \bigcup_{v \in S} N(v),$$

这意味着 $|V(G) - S| \leq |S| \cdot \Delta(G)$。因此 $p - \gamma(G) \leq \gamma(G) \cdot \Delta(G)$，从而 $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \right\rceil$。

接下去我们建立它的上界，设 v 是 G 的顶点且满足 $\deg(v) = \Delta(G)$。则 $V(G) - N(v)$ 是一个基数为 $p - \Delta(G)$ 的支配集，所以 $\gamma(G) \leq p - \Delta(G)$。■

没有孤立顶点的图的支配数的上界也可由覆盖数和独立数来表示。

定理 6.18 如果 G 是没有孤立顶点的图，则

$$\gamma(G) \leq \min\{\alpha(G), \alpha'(G), \beta(G), \beta'(G)\}$$

证明 因为没有孤立顶点的图的每个覆盖和每个最大独立集都是支配集，所以 $\gamma(G) \leq \alpha(G)$ 和 $\gamma(G) \leq \beta(G)$。设 X 是基数为 $\alpha'(G)$ 的边覆盖，那么 G 的每个顶点与 X 中至少一条边关联。

设 S 是在 X 的每条边中挑选一个关联顶点所得到的顶点子集，那么 S 是 G 的支配集，从而 $\gamma(G) \leq |S| \leq |X| \leq \alpha'(G)$。

接下去，设 M 是 G 的最大匹配。我们对 M 中的每条边 uv，选择一个与它关联的顶点满足：如果顶点 u 与某个 $\overline{M}$ 顶点邻接，则选择顶点 u，否则选择顶点 v，因为 M 是 G 的最大匹配，所以不可能出现顶点 u 和 v 分别与两个不同的 $\overline{M}$ 顶点关联，故这样选取是可行的，记所有选择的顶点构成的顶点子集为 S。因为每个 $\overline{M}$ 顶点至少与一个选择的顶点关联，故 S 为 G 的支配集，从而 $\gamma(G) \leq |S| = |M| = \beta'(G)$。■

通过图 G 的阶和支配数，Vizing 得到 G 的大小的一个上界，这里省略了这个结果的证明。

定理 6.19 如果 G 是 (p,q) 图且有 $\gamma = \gamma(G) \geq 2$，则

$$q \leq \frac{(p-r)(p-r+2)}{2} \tag{6.5}$$

借助于定理 6.19，我们能够提供一个由图 G 的阶和大小表达的 G 的支配数的界。

定理 6.20 如果 G 是 (p,q) 图，则

$$p - q \leq \gamma(G) \leq p + 1 - \sqrt{1+2q},$$

而且 $\gamma(G) = p - q$ 当且仅当 G 的每个分支是星或孤立顶点。

证明 由定理6.19中给出的不等式(6.5)，我们有

$$(p-\gamma(G))^2+2(p-\gamma(G))-2q\geq 0 \tag{6.6}$$

从不等式(6.6)中解出 $p-\gamma(G)$，并运用 $p-\gamma(G)\geq 0$ 的事实，我们有

$$p-\gamma(G)\geq -1+\sqrt{1+2q}$$

这就建立了所要的上界。

因为 $\gamma(G)\geq 1$，当 $q\geq p-1$ 时，就得到下界。注意：$q\geq p-1$ 包括全部连通图。假设 $q\leq p-1$，则 G 是一个至少有 $p-q$ 个分支的图。G 的每个分支的支配数至少是1，故 $\gamma(G)\geq p-q$。等式成立当且仅当 G 刚好有 $p-q$ 个分支，且每个分支的支配数是1。不过，这只能在 G 有 $p-q$ 个分支且每个分支是星或是一个孤立顶点的情况下出现。■

最后我们提供一个图和它的补图的支配数乘积及和的界以后将看到图的色数也有类似的结果。

定理6.21 如果 G 是 $p(p\geq 2)$ 阶图，则

(i) $3\leq\gamma(G)+\gamma(\overline{G})\leq p+1$；

(ii) $2\leq\gamma(G)\cdot\gamma(\overline{G})\leq p$

证明 (i)和(ii)的下界立即就能得到。只要注意到 $\gamma(G)=1$ 或 $\gamma(\overline{G})=1$ 时，则分别有 $\gamma(\overline{G})\geq 2$ 或 $\gamma(G)\geq 2$。接下去我们证明(i)中的上界。如果 G 有孤立顶点，则 $\gamma(G)\leq p$ 且 $\gamma(\overline{G})=1$；如果 $\overline{G}$ 有孤立顶点，则 $\gamma(\overline{G})\leq p$ 且 $\gamma(G)=1$，所以在这种情况下，总有 $\gamma(G)+\gamma(\overline{G})\leq p+1$。如果 G 和 $\overline{G}$ 都没有孤立顶点，则由推论6.16，$\gamma(G)\leq\frac{p}{2}$ 和 $\gamma(\overline{G})\leq\frac{p}{2}$，所以 $\gamma(G)+\gamma(\overline{G})\leq p$。

剩下来只要证明(ii)中上界。如果 $\gamma(G)=1$，上界是显然的。所以我们假设 $\gamma(G)=k\geq 2$，设 $S=\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$ 是 G 的最小支配集，并把 $V(G)$ 分成 $\gamma(G)=k$ 个子集 $V_1,V_2,\cdots,V_k$ 满足条件：(a) $v_i\in V_i(1\leq i\leq k)$，且 v_i 支配 V_i 中全部顶点和(b)使得

$$\sum_{i=1}^{k}|\{v\in V_i|V_i\backslash\{v\}\subseteq N(v)\}|$$

达到最大。

我们现在证明对任意 $1\leq i\leq k$，V_i 是 $\overline{G}$ 的支配集。假设不是这种情况。则存在顶点 $x\in V_t$ 和整数 $1\leq s\neq t\leq k$ 使得在 $\overline{G}$ 中，V_s 中的所有顶点都不与 x 邻接(即 V_s 不是 $\overline{G}$ 的支配集)，故 x 在 G 中与 V_s 中的每个顶点邻接。如果 $x=v_t$，那么 $S-\{v_s\}$ 是 G 的支配集且基数小于 $\gamma(G)$，这是不可能的，从而 $x\in V_t\backslash\{v_t\}$。如果 x 在 G 中邻接到 V_t 中每个其它顶点，那么 $(S-\{v_s,v_t\})\cup\{x\}$ 也是 G 的基数小于 $\gamma(G)$ 的支配集，故也不可能。因此，在 G 中 x 与 V_t 中的每个

顶点都邻接但不与 V_t 中的每个顶点邻接。定义 $V'_t = V_t - \{x\}$ 和 $V'_s = V_s \cup \{x\}$，对其它 $r \neq s,t$，定义 $V'_r = V_r$。这样，现在我们得到 $V(G)$ 的另一分法 $V'_1, V'_2, \cdots, V'_k$ 使得对任意 $1 \leq i \leq k$，$v_i \in V'_i$，且 V_i 支配 V'_i 中的全部顶点。然而，

$$\sum_{i=1}^{k} |\{v \in V_i | V_i \backslash \{v\} \subseteq N(v)\}| < \sum_{i=1}^{k} |\{v \in V'_i | V'_i \backslash \{v\} \subseteq N(v)\}|。$$

这是一个矛盾。

这样，每个 $V_i (1 \leq i \leq k)$ 是 $\overline{G}$ 中的支配集，所以 $\gamma(\overline{G}) \leq |V_i| (1 \leq i \leq k)$。故

$$p = \sum_{i=1}^{k} |V_i| \geq \gamma(G) \cdot \gamma(\overline{G}) \quad ■$$

定理 6.21 中，(i) 的上界能得到如下结果：如果 $K_p (p \geq 2)$ 被因子分解成 G_1 和 G_2，则 $\gamma(G_1) + \gamma(G_2) \leq p + 1$。

1958 年由 Berge 和 1960 年由 Ore 建立了图论中的支配理论。尤其是自 1977 年以来，当 Cockayne 和 Hedetniemi 概述了支配理论结果，支配理论已经受到了广泛的重视。下面我们简单地介绍一下独立支配数的概念来结束这一章。不难看出图 G 中的每个极大点独立集是 G 的一个支配集。因此，$\gamma(G) \leq i(G)$。这里称 $i(G)$ 是 G 的下独立数，即最小极大点独立集基数。不过不是每一个支配集是独立集。事实上，也不是每一个最小支配集是独立集。例如图 6.10 中图 G，集 $S_1 = \{u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2\}$ 是 G 的一个最大独立集（自然是支配集）；而 $S_2 = \{x, y, z\}$ 是 G 的一个最小支配集且显然 S_2 不是独立集（这些集在图 6.10 中用黑圈表示）。然而 G 确有一个最小支配集而且是独立集，即 $S_3 = \{u, v, w\}$。

现在我们是对又是极大独立集的这种支配集感兴趣。图 G 的一个顶点集 S 被称为 G 的独立支配集，如果 S 既是 G 的一个独立集又是一个支配集。这样图 6.10 中集 S_1 和 S_3 是独立支配集，而 S_2 和 $S_4 = \{u_1, v_1, w_1\}$ 就不是。G 的独立支配数 $i(G)$ 是 G 的全部独立支配集中最小基数又被称为下独立数。

定理 6.22 图 G 的一个顶点集 S 是一个独立支配集当且仅当 S 是一个极大独立集。

证明 因为每一个极大点独立集是一个支配集。反过来，假设 S 是一个独立支配集，则 S 是独立集且不属于 S 的每一个顶点都与 S 的一个顶点邻接，即 S 是极大独立集。■

推论 6.22 图 G 的每个极大独立集是一个极小支配集。

证明 设 S 是图 G 的一个极大独立集。由定理 6.22，S 是一个支配集。因

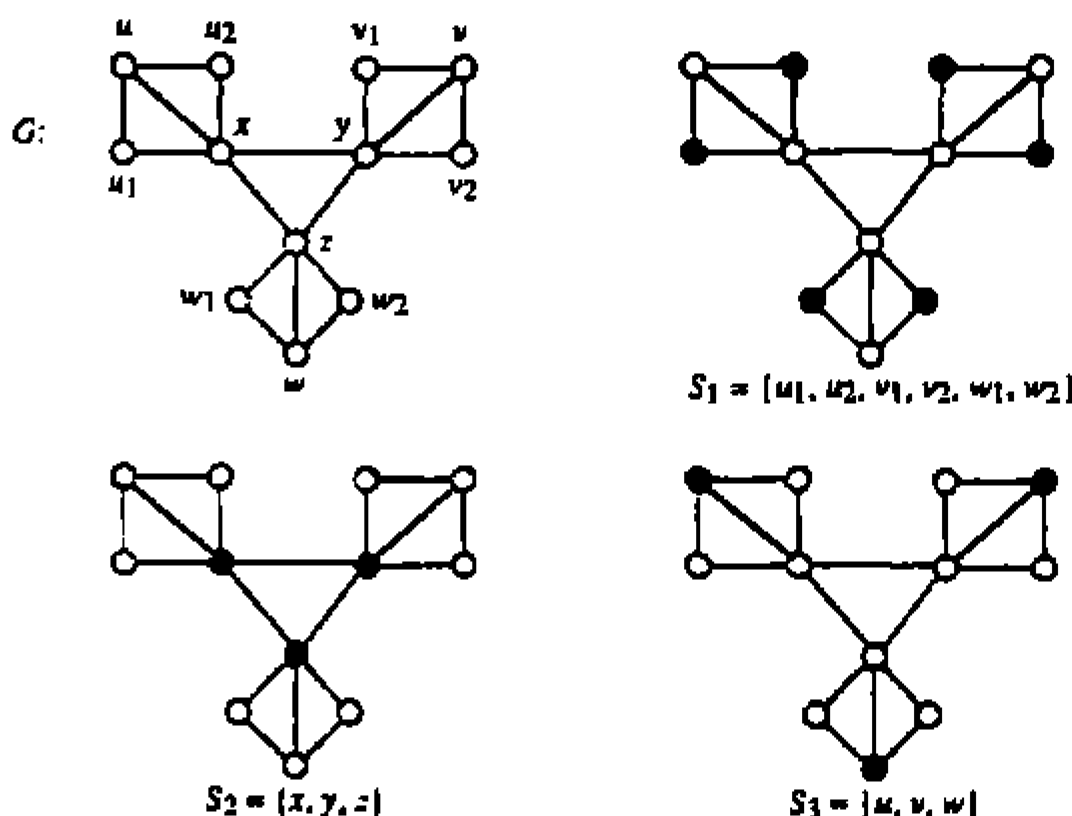


图 6.10 支配集和极大独立集

为 S 是独立集，显然 S 的每个顶点不与 S 中其他顶点邻接。这样，S 的每个顶点满足定理 6.14 中的性质(ii)，所以，由定理 6.14，S 是极小支配集。■

练习

1. 说明一个图不一定有任何独立的最小支配集。

2. 证明或否定：如果图 G 包含一个顶点独立的最小支配集，则 $\gamma(G) = i(G)$。

3. 对每个整数 $k \geq 3$，证明：存在一个图 G 使得 $i(G) = k$ 和 $\gamma(G) = 3$。

4. 证明：存在无穷多个图 G，对于这种图有 $i(G) + \gamma(G) = |V(G)|$。

5. 设 $p(p \geq 3)$ 为整数，确定 $\gamma(C_p)$ 和 $\gamma(P_p)$ 的值并给出证明。

6. 叙述并证明满足 $\gamma(G) = 1$ 的图 G 的特征。

7. (a) 是否存在图 G 使得 $\gamma(G) = \alpha(G)$ 且 $\gamma(G) < \min\{\alpha'(G), \beta(G), \beta'(G)\}$？(b) 由问题(a) 可以引出另外三个问题，叙述并回答这三个问题。

8. 确定 $\gamma(Q_3)$ 和 $\gamma(Q_4)$。

7 图的染色

这一章的主要目的是描述对图的各种方式的染色，即顶点染色、边染色和面染色。染色问题在图论中那么令人感兴趣，毫无疑问是由于它与四色问题有关，这一章也将涉及四色问题。这些年里最受人们注意的是染色问题，由此产生了图论中一类重要参数 — 色数。

7.1 顶点染色

设 G 为任意图且 C 代表颜色集合，如果存在映射 $\sigma: V(G) \to C$ 使得对任意 $uv \in E(G)$，$\sigma(u) \neq \sigma(v)$，则称 σ 为 G 的顶点染色或者染色法，即对 G 的每个顶点用 C 中的某种颜色染色使得每个顶点只染一种颜色，且相邻两个顶点染不同的颜色。如果在图 G 的某种染色法中总共使用的颜色不超过 n 种，就称它是图 G 的 n- 染色法，且称图 G 是 n- 可染色的。如果存在图 G 的 m- 染色法，那末对任意 $n \geq m$，G 存在 n- 染色法。显然，如果 G 是 p 阶图，则 G 是 p- 可染色的。为了以后叙述方便，约定 n 种颜色的集为 $C = \{1, 2, \cdots, n\}$。

对图 G 的顶点染色需要的最少颜色数称为 G 的点色数，或简称为 G 的色数，并用 $\chi(G)$ 来表示。如果图 G 满足 $\chi(G) = n$，则称 G 是 n- 色图。显然，对 G 的任意子图 H，$\chi(H) \leq \chi(G)$。

如果给定图 G 的 n- 染色法 σ，则对任意 $1 \leq i \leq n$，$V_i = \{v \in V(G) \mid \sigma(v) = i\}$ 称为 G 的色类。显然图 G 的每个色类是 G 的独立集，而且 G 的色数也可定义为 $V(G)$ 能划分为独立子集的最小个数。

如在本书一开始所举的第三个例子 —— 药品仓库贮存问题就是求相应图的色数 $\chi(G)$。又如某学校须在每学期期末，安排若干门选修课的考试，如果有某个学生要参加两门选修课的考试，当然在考试日程上这两门选修课的考试不能安排在同一时间内进行，如果又希望考试日程的安排尽可能短，则这个问题也能用图的染色解决。定义图 G 如下：G 的顶点表示考试课目，而两个顶点之间有边相连当且仅当至少有一个学生要同时参加这两门课的考试，那末最短的考试日程安排需要的时间就是 $\chi(G)$。

有几类图的色数是很容易确定的，例如

$$\chi(C_{2n}) = 2, \chi(C_{2n+1}) = 3, \chi(K_p) = p,$$

且对完全 n- 部图，可得

$$\chi(K_{p_1, p_2, \cdots p_n}) = n.$$

又如果 G 是 n- 部图，则 $\chi(G) \leq n$。如 G 是 2- 色图，则 G 是二部图，且在 G 的任何 2- 染色中色类就是二部图的部分集。另一方面每个非空二部图都是 2- 色图，因此我们可以断言非空图 G 是 2- 色图当且仅当它不含奇圈，由此可知每个非平凡树 T 也是 2- 色图。图 7.1 中的图 G 是 3- 色图且已经给出 G 的 3- 染色法，其中用整数 1，2，3 表示三种颜色，因此对每个 $n \geq 3$，这个图也是 n- 可染色的。

因为不连通图的色数是它的每个分支的色数的最大值，且有割点的连通图的色数是它的每个块的色数的最大值，所以在研究图的色数时，只须考虑不可分图的色数。

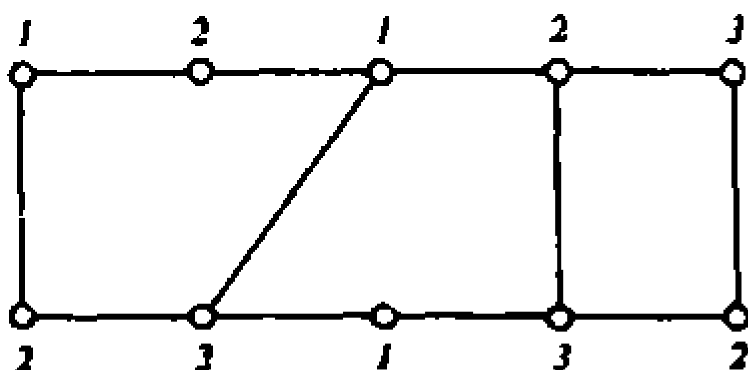
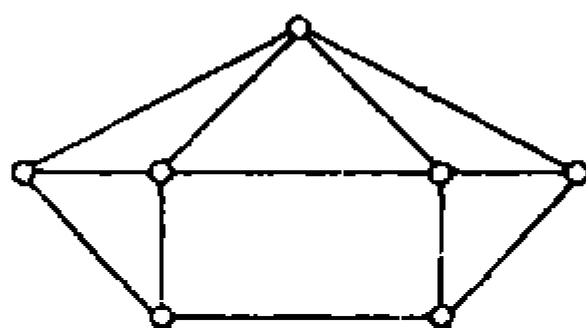


图 7.1 3- 色图 G

虽然色数是图论中最值得研究的参数，但由于任意图的色数的计算公式还没有得到，因此，在大多数情况下，人们只能满足于确定色数的界。为了得到色数的界，我们先讨论关于色数是临界的或最小的图的结构特征。


图 7.2 不是最小 4- 色图的临界 4- 色图

设 $n(n \geq 2)$ 为整数且 G 是任意的 n- 色图，如果对任意顶点 $v \in V(G)$，$\chi(G - v) = n - 1$，则称 G 为临界 n- 色图；如果对任意边 $e \in E(G)$，$\chi(G - e) = n - 1$，则称 G 是最小 n- 色图。已经得到了临界 n- 色图和最小 n- 色图的几个结果，这里我们将考虑其中最基本和最有用的一个结果。

每个临界 n- 色图是不可分图，而每个无孤立顶点的最小 n- 色图也是不可分图，此外，每个无孤立顶点的最小 n- 色图一定是临界 n- 色图。不过，一般说来并非每个临界 n- 色图都是最小 n- 色图，例如：图 7.2 中的图是临界 4- 色图，但并不是最小 4- 色图。特别对 $n = 2$ 或 3 时，每个临界 n- 色图都是最小 n- 色图。事实上，K_2 是唯一的临界 2- 色图又是唯一的无孤立顶点的最小 2- 色图；而奇圈是唯一的临界 3- 色图且又是唯一的无孤立顶点的最小 3- 色图。对 $n \geq$

4,已经得到既不是临界 n- 色图也不是最小 n- 色图的特点,一般说来,很难确定已给的 n- 色图是否是临界的还是最小的。但是,每个 n- 色图包含临界 n- 色子图和最小 n- 色子图,n- 色图 G 的阶最小的 n- 色子图一定是临界 n- 色图,而 G 的边数最小的 n- 色子图就是最小 n- 色图。

这一章的第一个定理与临界 n- 色图的结构有关。

定理 7.1 每个临界 n- 色图是 $(n-1)$- 边连通的 $(n \geq 2)$。

证明 利用反证法。假设图 G 是临界 n- 色图 $(n \geq 2)$,但是 G 不是 $(n-1)$- 边连通的,从而存在 G 的边割 E 使得 $|E| < n-1$ 且 $G-E$ 不连通,设 G_1 和 G_2 是 $G-E$ 的两个连通分支。如果 $n=2$ 或 3,那末分别有 $G \cong K_2$ 或 G 是奇圈,因此 G 是 1- 边连通的或 2- 边连通的,与假设矛盾,从而 $n \geq 4$。

因为 G 是临界 n- 色图,所以图 G_1 和 G_2 是 $(n-1)$- 可染色的。设给定 G_1 和 G_2 的 $(n-1)$- 染色法,且它们使用同样的 $n-1$ 种颜色。如果 E 的每条边与不同颜色的顶点相关联,那末 G 是 $(n-1)$- 可染色的,这与 $\chi(G)=n$ 的事实矛盾,所以假设存在 E 的边连接两个同样颜色的顶点。

设由 G_1 的 $(n-1)$- 染色法导出的色类为 $U_1, U_2, \cdots, U_{n-1}$。对任意 $1 \leq i \leq n-1$,令 n_i 表示连接 U_i 和 $V(G_2)$ 的边数,则

$$\sum_{i=1}^{n-1} n_i = |E| \leq n-2。$$

由于可以对 $U_1, U_2, \cdots, U_{n-1}$ 重新编号,从而可设存在整数 m 使得若 $1 \leq i \leq m$,则 $n_i \geq 1$,否则 $n_i = 0$。设 $u_i \in U_1$ 及 $v_i \in V(G_2)$ 使得 $u_iv_i \in E(1 \leq i \leq n_1)$。如果存在 $1 \leq i \leq n_1$ 使得顶点 u_i 和 v_i 有相同的颜色,则由 $n_1 \leq |E| \leq n-2 < n-1$,存在 $1 < k \leq n-1$ 满足 U_k 中的顶点使用的颜色与所有顶点 $v_i(1 \leq i \leq n_1)$ 的颜色都不同,将 U_1 和 U_k 使用的颜色对调,得到 G_1 的一个新 $(n-1)$- 染色法使得连接 U_1 和 $V(G_2)$ 的所有边的两个端点的颜色不同。下面在对 U_2 进行类似讨论可得存在 $2 \leq k \leq n-1$,将 U_2 和 U_k 使用的颜色对调得到 G_1 的另一个 $(n-1)$- 染色法使得连接 U_1 和 $V(G_2)$ 的所有边以及连接 U_2 和 $V(G_2)$ 的所有边的两个端点的颜色不同。

假设这个过程进行了 k 次,即得到 G_1 的 $(n-1)$- 染色法使得对任意 $1 \leq i \leq k$,连接 U_i 和 $V(G_2)$ 的所有边的两个端点的颜色不同。如果 $k=m$,由于当 $i > m$ 时,$n_i = 0$,则已经得到图 G 的 $(n-1)$- 染色法,与 $\chi(G)=n$ 矛盾,从而 $k < m$。因为 $\sum_{i=1}^{k} n_i \geq k$,所以 $n_{k+1} \leq |E| - k \leq n-2-k$,即 $V(G_2)$ 中所有与 U_{k+1} 的某个顶点邻接的顶点至多使用了 $n-2-k$ 个不同颜色。又因为 U_{k+1} 可以选择 $U_{k+1}, \cdots, U_{n-1}$ 这 $n-1-k$ 个色类所使用的任意一种颜色染 U_{k+1} 的所有顶点,所以存在 $k+1 \leq i \leq n-1$ 使得交换 U_i 和 U_{k+1} 使用的颜色后,所

有连接 U_{i+1} 和 $V(G_2)$ 的边的两个端点的颜色不同。如此下去，一定得到 G 的 $(n-1)$- 染色，与 $\chi(G)=n$ 矛盾。■

因为每个连通的最小 n- 色图是临界 n- 色图，所以上述结果有一个明显的推论。

推论 7.1a 如果 G 是连通的最小 n- 色图，那末 G 是 $(n-1)$- 边连通的。

定理 7.1 和推论 7.1a 意味着对每个临界 n- 色图或者连通的最小 n- 色图 G，有 $\kappa'(G)\geq n-1$。由定理 2.10 立即可得：

推论 7.1b 如果 G 是临界 n- 色图或连通的最小 n - 色图，那末 $\delta(G)\geq n-1$。

接下去我们给出图的色数的几个上界。

定理 7.2(Brooks) 如果连通图 G 既不是奇圈也不是完全图，则

$$\chi(G)\leq\Delta(G)。$$

证明 设连通图 G 既不是奇圈也不是完全图且 $\chi(G)=n(n\geq 2)$。令 H 是 G 的临界 n- 色子图，那末 H 是不可分图且 $\Delta(H)\leq\Delta(G)$。

如果 $H\cong K_n$ 或 H 是一个奇圈，那末 $G\ncong H$，因此由于 G 是连通的且 H 为正则图，所以 $\Delta(G)>\Delta(H)$ 且 $\chi(G)=\chi(H)=\Delta(H)+1\leq\Delta(G)$，结论成立。

如果 H 既不是奇圈又不是完全图，这意味着 $n\geq 4$。由推论 7.1b，$\delta(H)\geq n-1\geq 3$。又因为 H 不是完全图，所以存在 $u,v\in V(H)$ 使得 $d_H(u,v)=2$。设 H 的阶为 p 且 uwv 是 H 的 u—v 路。将 H 的顶点排为序列 $v_1,v_2,\cdots,v_p$ 使得 $v_1=u,v_2=v$，且对任意 $3\leq i<j\leq p$，$d_H(w,v_i)\geq d_H(w,v_j)$，即 $d_H(w,v_3),d_H(w,v_4),\cdots,d_H(w,v_p)$ 为不增的非负整数序列。由此可得 $v_p=w$。由于 $\deg_H(w)\geq 3$，所以 $v_{p-1}w\in E(H)$。换句话说，对任意 $3\leq i<p$，H 中的最短 v_i-w 路中不包含排在 v_i 前面的顶点，即存在 $p\geq j>i$ 使得 v_i 与 v_j 邻接。这意味着对任意 $1\leq i<p$，v_i 至多邻接到 $\Delta(H)-1$ 个排在它前面的顶点。

现在我们用归纳方法构造 H 的 $\Delta(H)$- 染色法。首先用颜色 1 染顶点 v_1 和 v_2，如果已经对顶点 $v_{k-1}(3\leq k\leq p)$ 染色，那末当 $k<p$ 时，与 v_k 邻接且已经染色的顶点个数至多有 $\Delta(H)-1$ 个，从而存在颜色 j 不在与 v_k 邻接的顶点上出现；当 $k=p$ 时，由于与 w 邻接的两个顶点 u 和 v 染相同的颜色，所以也存在颜色 j 不在与 w 邻接的顶点上出现，总之存在颜色 j 不在与 v_k 邻接的顶点上出现，所以可用颜色 j 对顶点 v_k 染色。由 $\chi(H)=n$ 及 H 存在 $\Delta(H)$- 染色法可得，$n=\chi(G)=\chi(H)\leq\Delta(H)\leq\Delta(G)$。■

现在我们可以得到关于任意图的色数上界。

推论 7.2 对每个图 G，

$$\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)。$$

定理 7.2 给出的色数上界对于某些图类来说并不好，例如：对星图 $K_{1,n}$ 提供的上界与色数相差 $n-2$。在下一节我们将看到 4 是所有平面图色数的上界，然而定理 7.2 没有给出这类图的界，而且存在几个重要图类，对于这些图，色数上界 $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ 确实也很差。在许多情况下，由 Halin，同时由 Szekeres 和 Wilf 得到的界有较好的效果。

定理 7.3 对每个图 G，

$$\chi(G) \leq 1 + \max_{G' < G} \delta(G')。$$

证明 对于空图，这个结果是显然的，所以我们可以假设 G 是满足 $\chi(G) = n \geq 2$ 的图。设 H 是 G 的导出临界 n- 色子图。因为 H 是 G 的导出子图，所以

$$\delta(H) \leq \max_{G' < G} \delta(G')。 \tag{7.1}$$

由推论 7.1b 可得 $\delta(H) \geq n-1$，所以由(7.1)

$$\max_{G' < G} \delta(G') \geq n - 1 = \chi(G) - 1,$$

定理结果成立。■

定理 7.3 给出了图 $K_{1,n}$ 的确切上界 2。因为每个平面图的最小度不超过 5 且每个平面图的子图也是平面图，故由定理 7.3 提供了平面图色数的上界是 6，这两种情况表明定理 7.3 的结果是对定理 7.2 的结果的明显改进。如果 G 是 r- 正则图，那末由定理 7.2 和定理 7.3 给出了 $r+1$ 为 $\chi(G)$ 的上界，但这个上界对于许多 r- 正则图来说是很差的，例如 $K_{r,r}$。

接下去我们再给出色数的其它一些上界。

定理 7.4 对任何图 G，

$$\chi(G) \leq 1 + m(G),$$

其中 $m(G)$ 表示 G 中最长路的长度。

证明 如果 G 是空图，则这个结果是显然的，所以我们假设 $\chi(G) = n \geq 2$。设 H 是 G 的临界 n- 色子图，由推论 7.1b，$\delta(H) \geq n-1$，由定理 3.6，H(从而 G) 包含长为 $n-1$ 的路，所以 $m(G) \geq n - 1 = \chi(G) - 1$，得到所要结果。■

由于不存在有效的算法来确定图的色数，所以人们就寻求色数的近似算法。下面的算法通常称为按序染色法，这种算法产生了标定图(图 G 称为标定图是指图 G 的顶点具有固定的标号)G 的一种染色法。事实上，由这种算法得到的色数上界可能与 $\chi(G)$ 相差甚远。

算法 7A(按序染色法) 已知标定图 G 且 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$。

1. 置 $i = 1$。

2. 置 $c = 1$。

3. 如果与 v_i 邻接的顶点都没有使用颜色 c，那末用颜色 c 染 v_i，并转到第五步。

4. 用 $c + 1$ 代替 c，并回到第三步。

5. 如果 $i = p$，则算法停止，否则用 $i + 1$ 代替 i，并回到第二步。

如果我们运用算法 7A 到图 7.3(a) 中的标定(4-色)图 G_1，我们得到图 7.3(b) 所示的 G_1 的最理想 4-染色。实际上，对 G_1 的任何标号方式，由算法 7A 可以产生 G_1 的 4-染色。运用这个算法到图 7.3(c) 中的标定 3-色图 G_2，然而，产生了图 7.3(d) 表示的 4-染色。

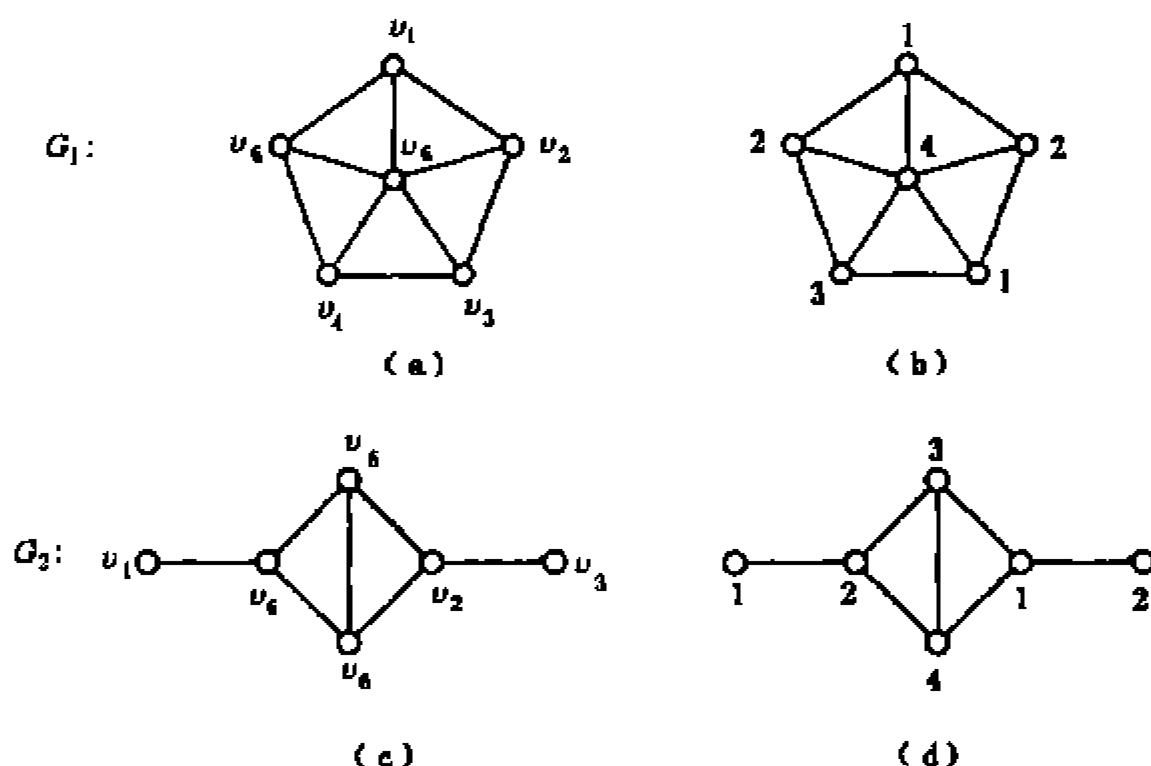


图 7.3　图的按序染色

算法 7A 提供了图的色数的另一个上界，Welsh 和 Powell 首先注意到了这个结果。

定理 7.5　设标定图 G 的顶点集为 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$，则

$$\chi(G) \leq \max_{1 \leq i \leq p}\{\min\{i, \deg(v_i) + 1\}\}。$$

证明　对 $1 \leq j \leq p$ 用归纳法，证明：由算法 7A 在染 $v_1, v_2, \cdots, v_j$ 时，需要的颜色数目至多是

$$\max_{1 \leq i \leq j}\{\min\{i, \deg(v_i) + 1\}\}。$$

当 $j = 1$ 这是正确的，假设 $j = k(1 \leq k \leq p)$ 时，使用的颜色数 n 满足：

$$n \leq \max_{1 \leq i \leq k}\{\min\{i, \deg(v_i) + 1\}\}。$$

如果不是全部颜色 $1,2,\cdots,n$ 已经由与 v_{k+1} 邻接的顶点使用，那末至少存在这些颜色中的一个可以染顶点 v_{k+1}，从而得到 $j=k+1$ 时的结果，故假设全部颜色 $1,2,\cdots,n$ 已经由与 v_{k+1} 邻接的顶点使用，那末用颜色 $n+1$ 染顶点 v_{k+1}，剩下来只要证明

$$n+1\leq\max_{1\leq i\leq k+1}\{\min\{i,\deg(v_i)+1\}\}。\tag{7.2}$$

因为 $n\leq k$，故 $n+1\leq k+1$。又因为 $\deg(v_{k+1})\geq n$，所以 $\deg(v_{k+1})+1\geq n+1$，因此

$$n+1\leq\min\{k+1,\deg(v_{k+1})+1\}。$$

这就证明了(7.2)。■

现在我们来研究色数的下界。如果 $H\subseteq G$，则显然 $\chi(H)\leq\chi(G)$。图的团数 $\omega(G)$ 是 G 中完全子图的最大阶数。如果对某个 n，$K_n\subseteq G$，则 $\chi(G)\geq n$，所以对每个图 G 我们总有 $\chi(G)\geq\omega(G)$。从我们已经看到的 $\chi(G)$ 的上界，人们可能以为 $\chi(G)$ 的这个下界一般说来也不会怎么好，但令人惊奇的是这个下界在某些情况下却出奇的好，由 D. Seinsche 得到下述结果。

定理 7.6(Seinsche) 如果图 G 不包含同构于 P_4 的导出子图，则

$$\chi(G)=\omega(G)。$$

根据定理 7.6，我们立即可得一个推论，由此可对 n-可染色图的结构特征进行刻画，遗憾的是这个结果使用起来特别困难。

推论 7.6a 设 n 为任意正整数且 G 是任意图，如果图 G 既不含 P_4 为导出子图也不含 K_{n+1} 为导出子图，则 G 是 n-可染色的。

如果图 G 不含 P_4 为导出子图，那末对 G 的任意导出子图 H，H 也不含 P_4 为导出子图。由此引出下述定义。如果对图 G 的每个导出子图 H 都有 $\chi(H)=\omega(H)$，则称 G 为完美的或者 G 是完美图。

推论 7.6b 如果图 G 不含 P_4 为导出子图，则 G 是完美图。

事实上，推论 7.6b 是一个很强的充分条件，且在大多数情况下它不是必要条件，例如：P_4 就是一个完美图，但不满足推论 7.6b 的条件。

因为二部图 G 的任何导出子图 H 是二部图，如果 H 是非空二部图，那末 $\chi(H)=2=\omega(G)$；如果 H 是空图，则 $\chi(H)=1=\omega(H)$，从而二部图是完美图，也是完美图的最简单例子。Berge 引进了完美图的概念，他猜想图 G 是完美的当且仅当 $\overline{G}$ 是完美的。这个猜想称为完美图猜想，而且已经由 Lovász 证明。

因为对任意整数 $k(k\geq2)$，$\chi(C_{2k+1})\neq\omega(C_{2k+1})$，所以如果图 G 存在导出子图是长至少为 5 的奇圈，则 G 不是完美图。现在假设 $\overline{G}$ 的某个导出子图是奇圈 $C_{2k+1}(k\geq2)$，那末 $\overline{G}$ 不是完美的，从而由完美图猜想 G 也不是完美的。Berge 的第二个猜想与此有关，通常称为强完美图猜想。

强完美图猜想 图G是完美的当且仅当G和$\overline{G}$的导出子图中不存在长至少为5的奇圈。

虽然对包括平面图和不含$K_{1,3}$作为导出子图的几类图已经证明强完美图猜想是正确的，但这个猜想最终还未完全证明。

前面我们给出图G的色数满足$\chi(G) \geq \omega(G)$，且说明在某些条件下这个界是最好的。但是在其它情况下，这个界也可能很差，事实上，存在无穷多个图满足$\chi(G) \geq 3$且G不包含三角形，例如：长至少为5的奇圈。

令人惊奇的是存在色数任意大且不含三角形的图。

定理 7.7 对任意正整数n，存在色数为n且不含三角形的图。

关于图的色数与补图的色数之间的关系，我们有下面一个很著名的结果，这个结果由 Nordhaus 和 Gaddum 得到。

定理 7.8 如果G是p阶图，则

(i)$2\sqrt{p} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq p + 1$，

(ii)$p \leq \chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \leq \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$。

证明 设已给图G的$\chi(G)$-染色法和$\overline{G}$的$\chi(\overline{G})$染色法。运用这两个染色法，我们可构造K_p的染色法。给K_p的任意顶点v染颜色(c_1,c_2)，其中c_1是在G中顶点v染的颜色，而c_2是在$\overline{G}$中顶点v染的颜色。因为K_p的任何两个顶点在G或在$\overline{G}$中是邻接的，所以它们在G或在$\overline{G}$中染不同的颜色。如果规定颜色$(c_1,c_2) = (c'_1,c'_2)$当且仅当$c_1 = c'_1$且$c_2 = c'_2$，所以由此得到K_p的一个$(\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}))$-染色，故

$$p = \chi(K_p) \leq \chi(G) \cdot \chi(\overline{G}).$$

由此得到(ii)中的下界。因为两个正数的算术平均值不小于它们的几何平均值，从而我们有

$$\sqrt{p} \leq \sqrt{\chi(G) \cdot \chi(\overline{G})} \leq \frac{\chi(G) + \chi(\overline{G})}{2},$$

所以得到(i)中的下界。

为了证明(i)中的上界，我们运用定理7.3。假设

$$k = \max_{H < G} \delta(H),$$

所以G的每个导出子图的最小度至多为k。根据定理7.3，$\chi(G) \leq 1 + k$。接下去，我们证明$\overline{G}$的每个导出子图的最小度至多为$p - k - 1$。假设存在$\overline{G}$的导出子图H满足$\delta(H) \geq p - k$。设H的阶为h，则对任意$v \in V(H)$，$\deg_{\overline{H}}(v) = h - 1 - \deg_H(v) \leq h - 1 - p + k$，故在$G$中，$\deg_G(v) \leq (h - p + k - 1) + (p - h) = k - 1$。

设 F 是 G 的导出子图使得 $\delta(F)=k$，则 $V(F)\cap V(H)=\varnothing$。因为 F 的阶至少为 $k+1$，故 H 的阶至多是 $p-k-1$，这与 $\delta(\overline{H})\geq p-k$ 的事实矛盾。因此，我们可以得出 $\overline{G}$ 的每个导出子图的最小度至多是 $p-k-1$，故由定理 7.3，$\chi(\overline{G})\leq 1+(p-k-1)=p-k$，从而

$$\chi(G)+\chi(\overline{G})\leq(1+k)+(p-k)=p+1,$$

这就完成了(i) 中上界的证明，(ii) 中上界由算术平均值不小于几何平均值的关系立即可得。■

练习

1. 证明：对每个 p 阶图 G，$\dfrac{p}{\beta(G)}\leq\chi(G)\leq p+1-\beta(G)$。

2. 对于荫度，确定且证明：与定理 7.1 类似的结果。

3. 对于图的不连通性，证明：与定理 7.2 类似的结果。

4. 设 G 是 10 阶 4- 正则图，那末由(a) 定理 7.2 和(b) 定理 7.3 给出的 $\chi(G)$ 的界是多少？

5. 证明：每个 n- 色图是某个完全 n- 部图的子图。

6. 设 G 是 n- 色图($n\geq 2$)，r 是正整数，且 $r\geq\Delta(G)$，证明：存在 r- 正则 n- 色图 H 使得 G 是 H 的导出子图。

7. 给出图的线图是 2- 可染色的充分必要条件。

8. 讨论由定理 7.4 给出的上界的可达性。

9. 证明：任意图 G 存在 G 的一种顶点标号使得由算法 7A 得到 G 的色数的上界为 $\chi(G)$。

10. 证明：对任意正整数 n，存在标定图 G 使得由算法 7A 得到的 G 的色数上界超过 n。

11. (a) 证明：如果图 G 的顶点标号为 $v_1,v_2,\cdots,v_p$，且满足 $\deg(v_1)\geq\deg(v_2)\geq\cdots\geq\deg(v_p)$，那末由定理 7.5 给出的 $\chi(G)$ 的上界不会超过由 G 的顶点任何其它标号方式给出的上界。

(b) 运用定理 7.5 证明推论 7.2。

12. 设 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 是互不相交的图，并定义 $G=G_1+G_2+\cdots+G_n$。证明：

$$\chi(G)=\sum_{i=1}^{n}\chi(G_i)\text{ 且 }\omega(G)=\sum_{i=1}^{n}\omega(G_i)。$$

13. 图 G 的共色数 $\overline{\chi}(G)$ 是 $V(G)$ 划分为子集的最小个数，使得每个子集在 G 中或者在 $\overline{G}$ 中是独立的。给出图 H 的例子，使得 $\overline{\chi}(H)=3$。

14. 证明：如果 H 是二部图，则 $\chi(\overline{H}) = \omega(\overline{H})$。

15. 说明定理 7.9 中给出的全部上下界都是可达的。

7.2 边染色

现在我们把注意力由图的顶点染色转到它的边染色。设G为非空图，如果$E(G)$到颜色集C的映射满足邻接边具有不同颜色，则称这个映射为G的边染色(如果C的基数为n，则称为G的n-边染色)。设n为整数，如果存在整数$m(m \le n)$使得G存在m-边染色，则称G是n-边可染色的。图G是n-边可染色的最小整数n称为G的边色数，并用$\chi'(G)$表示。

图G的边色数还有另外一种说法：非空图的边色数是将$E(G)$划分为边不交的匹配的并时，边不交匹配的最小个数。由边色数的定义可知：

$$\chi'(G) = \chi(L(G)).$$

从而，确定图G的边色数$\chi'(G)$的问题也能转化为确定G的线图$L(G)$的色数问题。这种转化看起来有些价值，但事实上，因为色数一般来说也是很难计算的，所以这种转化的价值并不大。很显然对任意图G，$\Delta(G)$是$\chi'(G)$的下界。在研究边色数时，Vizing 证明了$\chi'(G)$的上界等于$\Delta(G)+1$。

定理 7.9(Vizing) 如果G是非空图，则

$$\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G) + 1.$$

证明 定理的下界显然成立。关于上界，对$|E(G)| = q$进行归纳证明：任意图G存在$(\Delta(G)+1)$-染色。当$q=1$时，这个结果是显然的。假设这个结果对边数小于q的所有图成立，这里$q \ge 2$。设G是有q条边的图，我们证明G是$(\Delta+1)$-边可染色的，其中$\Delta = \Delta(G)$。

设$e = uv$是G的边，根据归纳假设，$G-e$是$(\Delta(G-e)+1)$-边可染色的。由于$\Delta(G-e) \le \Delta(G)$，所以$G-e$也是$(\Delta+1)$-边可染色的。

设已给$G-e$的$(\Delta+1)$-边染色，即除e外G的每条边已经由$\Delta+1$种颜色的某种染色使得邻接边染不同颜色。在G的这个局部$(\Delta+1)$-边染色中，对任意顶点$x \in V(G)$，如果与x关联的所有已经染色边的颜色都不同于颜色a，则称颜色a在顶点x上未出现，否则，就称颜色a在顶点x上出现。对图G的任何顶点x，由于$\deg(x) \le \Delta$，故至少有一种颜色在顶点x上未出现。

设$e = e_0$，$v = v_0$，并且颜色a_1在v_0上未出现。如果颜色a_1在顶点u上也未出现，则可用颜色a_1染边uv，从而得到G的$(\Delta+1)$-边染色，定理成立。从而颜色a_1在顶点u上出现，即存在与u关联的边$e_1 = uv_1$染颜色a_1。设颜色a_2在顶点v_1上未出现，则$a_2 \ne a_1$。如果a_2在顶点u上也未出现，则将边uv_1重新

染为颜色 α_2，而将边 uv_0 染为颜色 α_1，即可得到 G 的 $(\Delta+1)$- 边染色，故颜色 α_2 在顶点 u 上也出现。假设已经得到一组边序列 $uv_0, uv_1, \cdots, uv_{k-1}(k>2)$ 以及颜色序列 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 满足：

(1) 对任意 $1\leq i\leq k-1$，边 uv_i 染颜色 α_i；

(2) 对任意 $1\leq i\leq k$，颜色 α_i 在顶点 v_{i-1} 上未出现；

(3) 对任意 $1\leq i<j\leq k$，$\alpha_i\neq\alpha_j$；

(4) α_k 在顶点 u 上出现。

此时，存在边 uv_k 染颜色 α_k 以及在顶点 v_k 上未出现的颜色 α_{k+1}。下面分几种情况考虑。

情况 1　颜色 α_{k+1} 在顶点 u 上未出现。对任意 $0\leq i\leq k$，将边 uv_i 染颜色 α_{i+1}，从而得到 G 的 $(\Delta+1)$- 边染色。

情况 2　存在 $1\leq j\leq k$ 使得颜色 $\alpha_{k+1}=\alpha_j$。由于 uv_k 染颜色 α_k 且颜色 α_{k+1} 不在 v_k 上出现，所以 $j<k$。设 α 为在顶点 u 上未出现的颜色。如果颜色 α 在顶点 v_k 上也未出现，则将边 uv_k 染颜色 α，对任意 $0\leq i<k$，将边 uv_i 染颜色 α_{i+1}，从而得到 G 的 $(\Delta+1)$- 边染色。类似可得当 α 在顶点 v_{j-1} 上未出现时，存在 G 的 $(\Delta+1)$- 边染色，从而可假设颜色 α 在顶点 v_k 和 v_{j-1} 上均出现。令 $M=\{e\in E(G)\mid \text{边} e \text{染颜色} \alpha\}$，$M'=\{e\in E(G)\mid \text{边} e \text{染颜色} \alpha_j\}$ 且 $H=(M\cup M')$。根据定理 6.1，H 的每个分支为偶圈或者路。又因为颜色 α 在顶点 u 上未出现且 $\alpha_{k+1}=\alpha_j$ 在顶点 v_k 和 v_{j-1} 均未出现，故 $\deg_H(u)=\deg_H(v_k)=\deg_H(v_{j-1})=1$，所以 u, v_k 和 v_{j-1} 不在 H 的同一个分支上，设 H 中不包含顶点 u 且包含顶点 v_k 或 v_{j-1} 的分支为路 P。

如果 $v_{j-1}\in V(P)$，则交换 P 上所有边的颜色使得 α 在顶点 v_{j-1} 和 u 上均未出现，用颜色 α 染边 uv_{j-1}，对任意 $0\leq i\leq j-2$，用颜色 α_{i+1} 染边 uv_i 可得 G 的 $(\Delta+1)$- 边染色。

如果 $v_{j-1}\notin V(P)$，则 $v_k\in V(P)$。因为 H 中包含 u 的分支同时包含顶点 v_j 且与 P 是不交的，所以交换 P 上所有边的颜色不会改变边 uv_j 的颜色，从而可类似得到 G 的 $(\Delta+1)$- 边染色。

情况 3　对任意 $1\leq i\leq k$，$\alpha_i\neq\alpha_{k+1}$。此时，将边 uv_k 加入边序列，将颜色 α_{k+1} 加入颜色序列，则新的边序列和颜色序列满足条件(1)—(4)。由于颜色集为有限集，从而总会出现情况 1 或者情况 2，故 G 是 $(\Delta+1)$- 边可染色的。■

根据定理 7.10，全部非空图集实际上能分成两类，如果 $\chi'(G)=\Delta(G)$，则称 G 为第一类图，否则称为第二类图，这样主要问题是确定所给图是第一类图还是第二类图。

在图 G 的边染色中，具有同样颜色的全部边的集称为边色类。根据Vizing

定理，r-正则图G的边色数或者是r或者是$r+1$，例如，对$C_n(n\geq 3)$，如果n是偶数，则C_n是第一类图，否则为第二类图。如果r-正则图G满足$\chi'(G)=r$，则在G的任意r-边染色中，每个边色类一定导出G的1-正则生成子图，因此K_p是第一类图还是第二类图取决于p是偶数还是奇数。一般说来，每个奇阶正则图是第二类图，而每个偶阶正则图不一定是第一类图，例如，Petersen图就是偶阶正则图，但是它是第二类图。

尽管不太明显，但相对说来，第一类图明显多于第二类图。事实上，Erdös和Wilson已经证明了p阶图是第一类图的可能性，当p趋于无穷时，趋向于1。不过，确定图属于哪一类的问题还未彻底解决。下面给出的是图为第二类图的一个充分条件。

定理7.10 设G是$|E(G)|=q$的图，如果

$$q>\Delta(G)\cdot\beta'(G),$$

则G是第二类图，其中$\beta'(G)$是G的边独立数。

证明 假设G是第一类图，那末$\chi'(G)=\Delta(G)$。设已给G的$\chi'(G)$-边染色，则G的每个边色类最多包含$\beta'(G)$条边，故$q\leq\Delta(G)\cdot\beta'(G)$，与$q>\Delta(G)\cdot\beta'(G)$矛盾。■

由于对每个p阶图G，$\beta'(G)\leq\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor$，所以我们有下面的结果。

推论7.10 如果G是(p,q)图且

$$q>\Delta(G)\cdot\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor,$$

则G是第二类图。

值得指出的是定理7.11和它的推论都是很强的充分条件，实际上存在边数相对较少的第二类图。当然，奇圈是第二类图且它们是奇阶正则图，Petersen图是第二类图。图7.4的图称为“双重星”是第二类图。定理7.12证明了二部图是第一类图。

定理7.11 任意二部图G是第一类图。

证明 对二部图G的边数q进行归纳，证明：存在G的$\Delta(G)$-边染色。当$q=1$时，定理成立。假定对所有边数小于$q(q\geq 2)$的二部图，定理成立。现设G是有q条边的二部图且$e=uv$是G的边，根据归纳假设，图$G-e$存在$\Delta(G-e)$-边染色。由于$\deg_{G-e}(u)<\Delta(G)$且$\deg_{G-e}(v)<\Delta(G)$，故在顶点u和v上至少各有一种颜色未出现，如果颜色a在顶点u和v上都未出现，则用颜色a染边e得到G的$\Delta(G)$-边染色。如果颜色a_1在顶点u上未出现但在顶点v上出现，而颜色a_2在顶点v上未出现而在顶点u上出现。考虑$G-e$中由所有a_1

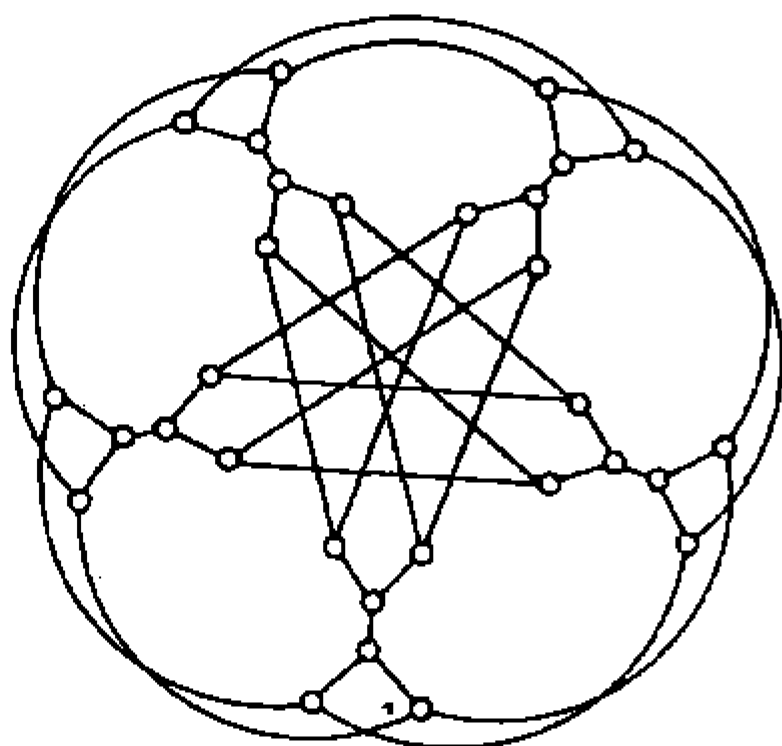


图 7.4 双重星:3- 正则的第二类图

色边和所有 α_2 色边导出的子图 G',根据定理 6.1,G' 的连通分支必为路或偶圈,而且顶点 u 和 v 都是路的端点。又因为顶点 u 和 v 分别属于二部图的不同部分集,所以 G' 中的任意 u—v 路为奇长路,但是在 G' 中,顶点 u 和 v 上出现的颜色不同,所以顶点 u 和 v 一定不属于同一条路,即顶点 u 和 v 属于 G' 的不同分支。这时只要把顶点 u 所在的分支上的所有边的颜色 α_1 和 α_2 对调使得在顶点 u 上颜色 α_2 也不出现,把边 e 染颜色 α_2 得到 G 的 $\Delta(G)$- 边染色。■

在下一节我们将讨论平面图的染色,主要是顶点染色和面染色。这里我们简单地介绍一下平面图的边染色,在本节中,我们剩下的主要问题是确定平面图是第一类图还是第二类图。对任意整数 $n(n \geq 2)$,最大度为 n 且是第一类图的平面图很容易找到,因为全体星图是平面图且是第一类图,但是确实存在是第二类图的平面图满足最大度 $n = 2,3,4$ 或 5。当 $n = 2$,K_3 具有所要求的性质;当 $n = 3,4$ 或 5 时,图 7.5 中的图也满足所需要求。

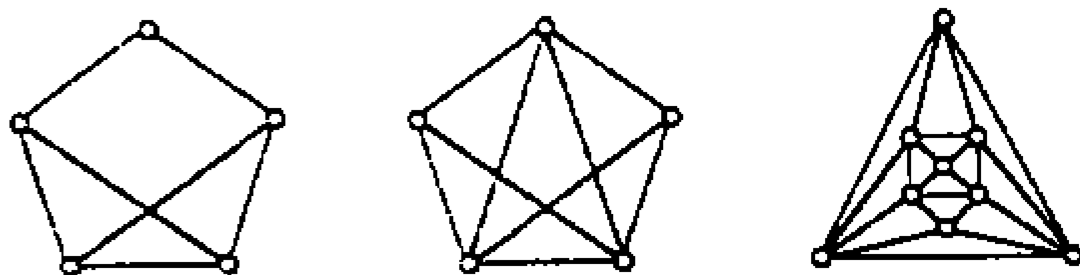


图 7.5 第二类平面图

还不知道是否存在有最大度是 6 或 7 的第二类平面图,不过 Vizing 已经证明了如果 G 是平面图且 $\Delta(G) \geq 8$,则 G 是第一类图。

练 习

1. 证明：每个二部图 G 是某个 $\Delta(G)$- 正则二部图的子图。

2. 证明：每个非空奇阶正则图是第二类图。

3. 设 H 是奇阶非空正则图，且 G 是通过从 H 中删去至多 $\frac{\Delta(H)-2}{2}$ 条边得到的图，证明：G 是第二类图。

4. 证明或否定：如果 G_1 和 G_2 是第一类图且 $G_1 \subseteq H \subseteq G_2$，则 H 是第一类图。

5. 证明：Petersen 图是第二类图。

6. 证明：图 7.5 中的每个图是第二类图。

7. 确定五个正多面体图分别属于哪一类。

8. 设 G 是至少有两条边的图，如果对 G 的每条边 e，$\chi'(G-e) < \chi'(G)$，则称 G 是最小 $\chi'(G)$- 边色图。若 G 是最小 $\chi'(G)$- 边色图，$\Delta(G) = \Delta$ 且 $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$，则称 G 是 Δ- 最小图。

(a) 试各举一个 3- 最小图和 4- 最小图的例子。

(b) 证明：图 G 是 2- 最小图的充分必要条件是 G 为奇圈。

(c) 证明：不存在 4 阶和 6 阶的最小图。

7.3 面染色

据说几个世纪以前的地图绘制者们已经认识到这样的"事实"就是平面（或球面）上的任何地图能用四种或更少的颜色染色而使相邻国家具有不同颜色，两个国家认为是相邻的，如果两个国家有一段公共边界线（不单单指一个公共顶点）。不过正象 May 所指出的那样，无论在古代的地图集中，还是关于制图学的书中，或者是有关绘制地图的历史书籍中，都没有这方面的记载，也没有迹象表明过去的人们已经熟悉了这个所谓事实。实际上，四色问题即判定平面（或球面）上任何地图能否用四种或少于四种颜色染色，使得相邻国家具有不同颜色的问题很可能是数学家的头脑中产生和发展起来的。那末，四色问题的起源又是怎样的呢？关于四色问题的首次书面提及出现在由伦敦大学数学学院教授 Augustus De Morgan 于 1852 年 10 月 23 日给位于都柏林的 Trinity 学院的 William Rowan Hamilton 爵士的一封信中（后来 Hamilton 图就是以他的名字命名），De Morgan 在这封信中写道：

今天我的一个学生希望我能对他的一个事实回答其原因，我自己很难确

认这个所谓的事实是真的，且至今也仍不清楚它的准确答案和应该如何回答。他说，在将平面任意划分成几个部分的图形中，如果每个部分用不同的颜色染色使得有公共边界线的部分染不同颜色——四种颜色可能是需要的但不必更多……，难道对于五种或五种以上颜色就完全不必要……，但这是很难说清楚的…，你认为如何呢？如果这是正确的，不知是否引起过注意？我的学生说是他在给一张英格兰地图染色时想到了这个问题。我越想越觉得这个问题似乎很明显，如果你能举出某些简单例子来说明我是错的话，我想我得象 Sphynx 做的那样去做……。

De Morgan 提及的这个学生是 Frederick Guthrie。到1880年，这个问题已变得广为人知了，在那一年，Frederick Guthrie 发表了一篇短文，在那篇短文中他声称 De Morgan 提到的问题是他的兄弟 Francis Guthrie 提出来的，我们引证一下 Frederick Guthrie 的短文。

大约三十年前，当我正在听 De Morgan 教授讲课时，我的兄弟 Francis Guthrie 刚结束听他的课（他现在是位开普敦的南非大学数学教授），他告诉我这样一个事实，在给一张地图染色时，要使以线为邻接的面避免具有相同颜色，所需颜色的种数最多为 4。当时我未敢证实，相隔一段时间后，我试图给出它的证明…。

得到我兄弟的允许，我把这个结论转告 De Morgan 教授，他当时就表示对此很感兴趣，且认为它是一个新的发现。而且正如后来听他课的人告诉我，他一直认为他是从那里得到这一信息。

如果没有记错的话，我兄弟给出的证明，说句实话，他自己也很不满意。但我必须把他及有关事实告诉对这一问题感兴趣的人。

根据这篇短文，我们似乎完全可以说四色问题是由一个名字叫 Francis Guthrie 的人发现的。重新回到 De Morgan 给 Hamilton 的信。我们注意到在1852年10月26日，Hamilton 的回信中很快给了一个公正的答复。

我不可能很快解决你的"四色问题"。

在继续探讨四色问题的简单历史前，我们暂且先给出这个问题的一个简明的数学描述。

如果平面图 G 的面能够用 n 或小于 n 种颜色染色使相邻面染上不同的颜色，则称平面图是 n- 面可染色的。因此四色问题就是下面的猜想。

四色猜想(1)　每个地图（平面图）是 4- 面可染色的。

正像我们将要看到的那样，在研究四色猜想时，人们不必去考虑所有平面图。

平面图 G 的面色数 $\chi^*(G)$ 是指 G 是 n- 面可染色的最小 n。因为 $\chi^*(G)$ 是

G 的块中面色数的最大值，所以四色问题可以陈述为确定每个不可分平面图是 4- 面可染色的。

在图论中，四色问题通常是利用图的顶点染色来陈述的，即用图的色数来表示。用这种方式，四色猜想可作如下陈述。

四色猜想(2) 每个平面图是 4- 可染色的。

首先，我们来证明四色猜想的这两种形式是等价的。不过为了做到这一点，需要一些新的概念。

对于已给连通平面图 G，我们构造伪图 G_d 如下：在 G 的每个面 f 里放上一个顶点 v_f，并且这些顶点就构成 G_d 的顶点集；对 G 的每条边 e，如果边 e 位于 G 的两个不同的面 f_1 和 f_2 的公共边界上，则在 G_d 的两个顶点 v_{f_1} 和 v_{f_2} 之间加入一条边，此外如果边 e 仅位于 G 的一个面 f 的边界上(此时，边 e 是 G 的桥)，则在 G_d 的顶点 v_f 上加入一个环。在画 G_d 的边的时候，我们可以穿过 G 的对应边，而不穿过 G 或 G_d 的其它边(这总是可能的)，所以 G_d 是平面图。伪图 G_d 称为 G 的对偶。除了 G_d 是平面图以外，还有这样的一些性质：(1)G_d 与 G 有同样的大小且能如此画使 G_d 的每个面包含 G 的一个顶点；(2)$(G_d)_d \cong G$。如果将连接 G_d 的两个顶点的重边集用一条边来代替，且删去全部的环，则由此得到的图就是我们通常的图，称为 G_d 的基础图，记为 $\check{G}_d$。图 7.6 对上述概念作了说明，用黑圈表示的是 G_d 的顶点。

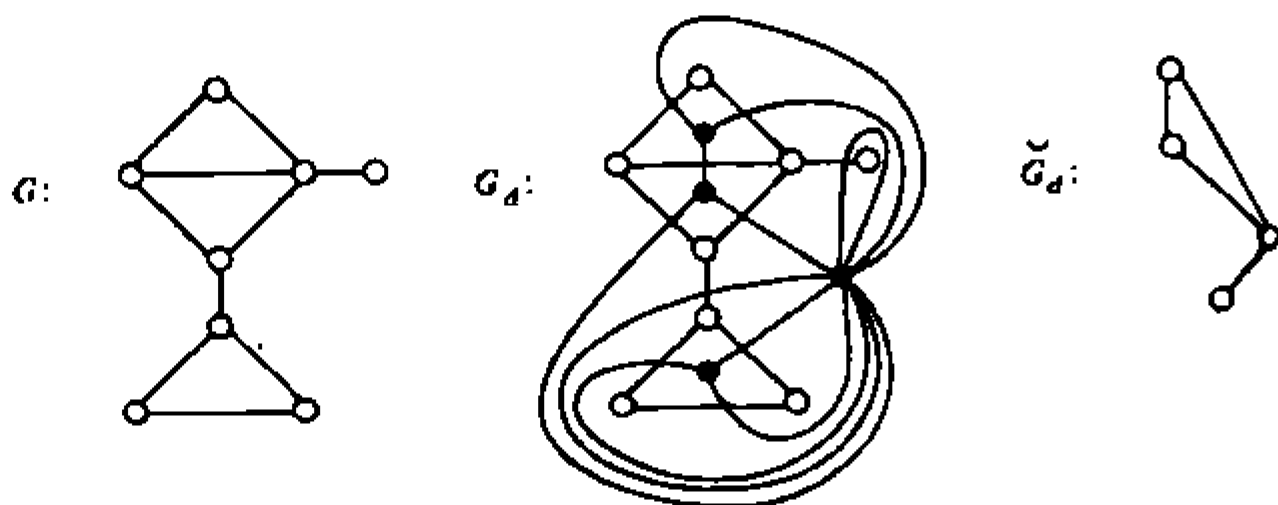


图 7.6 平面图的对偶和对偶图的基础图

定理 7.12 每个平面图是 4- 可染色的当且仅当每个平面图是 4- 面可染色的。

证明 不失一般性，我们可以假设所考试的图是连通的，假设每个平面图是 4- 可染色的。设 G 是任意连通平面图，考虑它的对偶图 G_d 的基础图 $\check{G}_d$，G 的两个面是邻接的当且仅当 $\check{G}_d$ 中的对应顶点是邻接的。因为 $\check{G}_d$ 是平面图，故

根据假设$\check{G}_d$是4-可染色的，因此，G是4-面可染色的。

反过来，假设每个平面图是4-面可染色的，并设G是任意连通平面图。正像我们已经注意到的那样，G的对偶图G_d能嵌入平面使得G_d的每个面恰好包含G的一个顶点。如果G_d不是图而是伪图，那末通过在G_d的每个环上插入二个顶点，并对连接两个顶点的重边集的所有边，除了一条边以外，全放上一个顶点，G_d就转变成图G'，G的两个顶点是邻接的当且仅当G'的对应面是相邻的。因为G'是4-面可染色的，所以G是4-可染色的。■

有了上述这些概念，现在再回到四色问题的历史故事。我们可以肯定，这个问题最初明显是由Francis Guthrie在1852年提出来的，但这个问题渐渐变得广为人知也许完全是由于De Morgan的缘故，是他经常向其他一些数学家谈及这个问题。已知最早有关四色问题的文献出现在1860年4月14日，它是De Morgan发表在Athneaum上的一篇未署名的论文。到1860年这个问题已变成众所周知的了。1878年6月13日，在伦敦数学协会的会议期间，当Arthur Cayley问到这个问题是否已经得到解决时，四色问题更受到了人们的注意和重视，此后不久，Cayley发表了一篇论文，在这篇论文中也提出他的观点，阐述了为什么这个问题会显得那么困难的原因。从他的观点，人们很自然地可能会猜想存在具有色数任意大的平面图。

与四色问题有关的最重大的事件之一是发生在1879年7月17日，自然杂志宣称四色猜想已由Alfred Bray Kempe证实。Kempe对四色猜想的证明出现在1879年他发表的一篇论文里，并且也记述在1880年发表的一篇论文里。在大约十余年左右时间里，人们认为四色猜想已经解决，然而在1890年，Percy John Heawood发现了Kempe的证明中的一个错误，而且Heawood应用Kempe的方法，证明了每个平面图是5-可染色的。这个结果很自然地称为五色定理。

定理7.13(五色定理)　每个平面图是5-可染色的。

证明　对图的阶p进行归纳证明。如果$p \leq 5$，则结果是显然的。

假设全部至多有$p-1(p>5)$个顶点的平面图是5-可染色的。设G是阶为p的平面图，由推论5.2b，G包含一个度不超过5的顶点v。从G中删去顶点v，我们得到$p-1$阶平面图$G-v$。由归纳假设，它是5-可染色的，设已给$G-v$的5-染色法，且用1，2，3，4，5代表五种颜色。如果在染色法中，所有用来染与v邻接的顶点的颜色数不超过4，即存在某种颜色没有使用过，那末可用这种颜色染顶点v，由此得到G的5-染色，否则，$\deg(v)=5$并且与顶点v邻接的顶点使用了全部五种颜色。

不失一般性，假设 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 是与 v 邻接且环绕 v 排列的五个顶点，另外用来染顶点 v_i 的颜色为 $i(1 \leq i \leq 5)$。现在考虑染不连续的两个顶点 v_i 和 v_j 的两种颜色，比方说 1 和 3，并设 H 是由全部染 1 和 3 两种颜色的顶点导出的 $G - v$ 的子图。如果顶点 v_1 和 v_3 属于 H 的不同分支 H_1 和 H_2，且 $v_1 \in V(H_1)$，那末通过交换 $V(H_1)$ 中所有顶点的颜色，又得到 $G - v$ 的一种 5- 染色法，且在这个染色法中，所有与顶点 v 邻接的顶点均不染颜色 1，因此用颜色 1 染顶点 v 得到 G 的 5- 染色法。

然后假设 v_1 和 v_3 属于 H 的同一分支，所以存在 H 中的一条 $v_1—v_3$ 路 P 使得 P 上的所有顶点都染 1 或 3 色。路 P 连同路 v_3vv_1 形成了 G 的圈 C，且顶点 v_2 在圈 C 的内部(或外部)，而顶点 v_4 和 v_5 在圈 C 的外部(或内部)，所以不可能存在 G 中全部顶点染 2 或 4 色的 $v_2—v_4$ 路。用 F 代表全部染 2 色和 4 色的顶点导出的子图，交换包含 v_2 的 F 的分支中所有顶点的颜色，我们重新得到 $G - v$ 的 5- 染色法使得所有与 v 邻接的顶点没有一个染颜色 2，用颜色 2 染顶点 v 即可得到 G 的 5- 染色法。■

在 Heaword 论文发表后的 86 年中，为了开启四色问题的奥妙，世界各国的数学家们作了无数次尝试，直到 1976 年 6 月 21 日，Kenneth Appel 和 Wolfgang Haken 宣布在 John Koch 帮助下，他们已经证明了四色猜想。Appel 和 Haken 的证明逻辑上是很简单的，事实上，许多思想本质上和 Kempe 以及后来由 Heawood(不成功的证明) 所使用的想法是同样的，不过，他们的证明是相当复杂的，且有极大量的必不可少的不同情况要进行辨别，从而需要进行大量的计算，单计算机就运行了近 1200 个小时，后来对这个证明又作了精确的改进，最后有效地缩短了计算机的运行时间。

定理 7.14(四色定理) 每个平面图是 4- 可染色的。

下面是四色定理的一个有趣推论，为了建立这个结果，使用代数中群 $Z_2 \times Z_2$ 是比较方便的，我们用 $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ 表示群 $Z_2 \times Z_2$ 的元素并定义加法如下：

$$(i,j) + (m,n) = (i+m, j+n),$$

其中加法 $i+m$ 和 $j+n$ 按照模 2 加法计算，所以 $(0,0)$ 是 $Z_2 \times Z_2$ 的零元。

推论 7.14 每个无桥 3- 正则平面图是 3- 边可染色的。

证明 设 G 是任意无桥 3- 正则平面图，所以 G 是 4- 可染色的，也是 4- 面可染色的。对 G 的面用群 $Z_2 \times Z_2$ 的元素染色。因为 G 是无桥的，所以 G 的每条边属于两个相邻面的边界。定义边 e 的颜色为以边 e 作为部分边界的两个面的颜色的和，因为 $Z_2 \times Z_2$ 的每个元是自逆的，所以没有 G 的边染为颜色 $(0,0)$。又因 $Z_2 \times Z_2$ 是一个群，从而与某个顶点关联的三条边一定染为 $Z_2 \times Z_2$ 剩下

的元素(0,1),(1,0) 和(1,1),所以 G 是 3- 边可染色的。■

对四色问题的详细的介绍和四色定理证明的综述,有兴趣的读者可进一步查阅有关资料如 Biggs,Lioyd 和 Wilson 的论文,或者 Appel 和 Haken 的,或者 Haken 的,或者 F. Brenhart 的著作。

四色定理处理了能嵌入平面的全部图的最大色数。对亏格为 n 的曲面 S_n(这里所指的曲面总是紧致定向 2- 流形),用 $\chi(S_n)$ 来表示所有能嵌入 S_n 的全部图的最大色数。曲面 S_0 就是球面,从而由四色定理可知 $\chi(S_0)=4$。首先,由 Heawood 证明了 $\chi(S_1)=7$,即环面的色数是 7,后来,Heawood 认为他已经证明,对任意 $n\geq 0$,$\chi(S_n)=\left\lfloor\frac{7+\sqrt{1+48n}}{2}\right\rfloor$。但是,Heffter 指出 Heawood 只建立了 $\chi(S_n)$ 的上界,即对任意 $n\geq 0$,

$$\chi(S_n)\leq\left\lfloor\frac{7+\sqrt{1+48n}}{2}\right\rfloor. \tag{7.3}$$

从而,对任意 $n\geq 0$,

$$\chi(S_n)=\left\lfloor\frac{7+\sqrt{1+48n}}{2}\right\rfloor$$

便成为著名的 Heawood 地图染色猜想。许多人曾经对这个猜想进行了研究,直到 1968 年,Ringel 和 Youngs 完成了这个猜想的非凡证明,从而这个结果现在称为 Heawood 地图染色定理。这里提出的证明是以(7.3) 为前提的。

定理 7.15(Heawood 地图染色定理) 对每个正整数 n,

$$\chi(S_n)=\left\lfloor\frac{7+\sqrt{1+48n}}{2}\right\rfloor.$$

证明 根据(7.3),我们只要证明:对任意 $n>0$,

$$\chi(S_n)\geq\left\lfloor\frac{7+\sqrt{1+48n}}{2}\right\rfloor$$

即可,令

$$p=\left\lfloor\frac{7+\sqrt{1+48n}}{2}\right\rfloor,$$

所以 $p\leq(7+\sqrt{1+48n})/2$,由此得到 $n\geq(p-3)(p-4)/12$,故

$$n\geq\left\lceil\frac{(p-3)(p-4)}{12}\right\rceil. \tag{7.4}$$

根据定理 5.23,不等式(7.4) 右边等于 K_p 的亏格,即 $\gamma(K_p)\leq n$,所以

$$\chi(S_{\gamma(K_p)})\leq\chi(S_n).$$

显然,K_p 在 $S_{\gamma(K_p)}$ 上是可嵌入的,从而 $\chi(S_{\gamma(K_p)})\geq p$,即 $\chi(S_n)\geq p$。■

值得注意的是四色定理正是定理 7.13 当 $n = 0$ 的情况。

练习

1. 证明：平面图 G 是 2-面可染色的当且仅当 G 是 Euler 图。

2. 证明：平面三角剖分图 G 是 3-可染色的当且仅当 G 是 Euler 图。

3. 证明：每个 Hamilton 平面图都是 4-面可染色的。

4. 证明：除了 K_4 以外，每个平面三角剖分图都是 3-面可染色的。

5. 设 G 是 3-正则图，证明：G 是 3-面可染色的充分必要条件是 G 的每个面的边界都有偶数条边。

8 极图理论

在这一章我们主要研究的几个专题都是属于极图理论的领域。由于著名的 Ramsey 理论在极图理论中最活跃，从而也是本章要讨论的主要内容。

8.1 Turán 定理

对于任意的 p' 阶图 H，当 $p \geq p'$ 时，H 为 K_p 的子图。这个明显的结论提示我们：对于任意给定的一个图 F 以及给定自然数 $p(p \geq p(F))$，当 p 阶图 G 的边数足够多时，F 一定为 G 的一个子图。即存在一个边数的下界 $f(p)$，当 p 阶图 G 的大小满足 $q(G) \geq f(p)$ 时，F 一定为 G 的一个子图。如果边数的下界是可达的，那么存在一个 p 阶且大小为 $f(p)-1$ 的图 G 使得 G 不包含子图 F，此时，称图 G 为 F 的极图。类似地，可以定义关于图的性质 P 的极图特性。确定可达的界 $f(p)$ 以及所产生的极图构成了图论的一个重要领域 —— 极图理论。

1941 年，Turán 提出并解决这样一个问题：对于已给正整数 p 和 n 确定最小整数 $T(p,n)$ 使得每一个 p 阶且大小至少是 $T(p,n)$ 的图包含 K_n 作为子图。由此开创了极图理论的研究。事实上，在前几章已经涉及到极图理论的某些结果：如果 $p(p \geq 3)$ 阶且至少有 p 条边的图 G，一定有一个圈；如果 p 阶图 G 满足 $q(G) \geq (p-1)(p-2)/2+2$，则 G 为 Hamilton 图。因为每个阶为 p，大小为 $p-1$ 的树一定不含有圈；而对于任意的 $p>1$，在 K_{p-1} 上加上一条悬挂边得到的 p 阶，大小为 $(p-1)(p-2)/2+1$ 的图不是 Hamilton 的，从而上述两个界都是可达的。如果 G 是 $p(p \geq 2)$ 阶且至少有 $(p-1)(p-2)/2+1$ 条边的图，那么 G 是连通的，实际上，G 有一条 Hamilton 路。如果在上图中增加条件 p 是偶数，则 G 包含一个 1-因子。图 $K_{n-1} \cup K_1$ 表明全部这些界是可达的。

对于给定的 k 阶图 F 和给定的整数 $p(p \geq k)$，所有不包含 F 作为子图的 p 阶图中边数的最大值称为 F 的极数，记为 $\mathrm{ex}(p,F)$。由极数的定义可知：任意有 $\mathrm{ex}(p,F)+1$ 条边的 p 阶图包含 F 作为子图；如果 p 阶图 G 至少有 $\mathrm{ex}(p,F)$ 条边且不包含 F 作为子图，则称 G 为 F 的极图。由对 Hamilton 图的讨论，

可得对任意 $p \geq 3$，$ex(p,C_4) = (p-1)(p-2)/2+1$。首先对如 K_2，P_3 这类图 F 确定 $ex(p,F)$ 是比较容易的。如果 $F = K_2$，则 $ex(p,F) = 0(p \geq 2)$；如果 $F = P_3$，则

$$ex(p,F) = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor (p \geq 3);$$

如果 $F = 2K_2$，则 $ex(p,F) = p-1(p \geq 4)$（见本节练习 1 和 2）。

定理 8.1 如果 $p(p \geq 3)$ 阶图 G 的大小至少为：

$$\left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor + 1,$$

则 G 包含三角形。

证明 对 $p(p \geq 3)$ 用归纳法。当 $p = 3$ 时，唯一的 p 阶且大小至少为 $\left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor + 1$ 的图是 K_3，结论显然成立。对于 $p = 4$，满足定理条件的图只有 $K_4 - e$（其中 e 为 K_4 的任意一条边）和 K_4，而这两个图都包含三角形。所以对于 $p = 3,4$，定理结果是正确的。

假设 $k(4 \leq k < p)$ 阶且大小至少是 $\left\lfloor \frac{k^2}{4} \right\rfloor + 1$ 的每个图包含三角形。下面证明对于 p 阶且至少有 $\left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor + 1$ 条边的图 G，定理结论成立。设 u 和 v 是 G 的两个邻接顶点，如果 $N_G(u) \cap N_G(v) \neq \varnothing$，则 G 包含一个三角形。假设 $N_G(u) \cap N_G(v) = \varnothing$，则 $H = G - u - v$ 的每一个顶点至多与 u 和 v 中的一个邻接，从而 H 满足：

$$p(H) = p - 2 \text{ 且}$$

$$q(H) \geq q(G) - (p-1) \geq \left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor + 1 - (p-1)$$

$$= \left\lfloor \frac{p^2 - 4p + 4}{4} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{(p-2)^2}{4} \right\rfloor + 1.$$

根据归纳假设，H 包含三角形，从而 G 也包含三角形。■

对任意 $p \geq 3$，令

$$n = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor, m = \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil,$$

则 p 阶图 $K_{n,m}$ 满足：

$$q(K_{n,m}) = \left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor$$

且不含三角形，从而定理 8.1 给出的界是可达的，同时说明了

$$ex(p,K_3) = \left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor (p \geq 3).$$

事实上，由以上方法构造的完全二部图 $K_{n,n}$ 是唯一的一个不包含三角形的极图(在下面可见到该结论的证明)。

对于定理 8.1，可重述为：如果 $p(p\geq 3)$ 阶图 G 满足：

$$q(G)\geq\left\lfloor\frac{p^2}{4}\right\rfloor+1,$$

则 G 包含 K_3 作为子图。这个结果能够推广到包含任意 $r(r\geq 2)$ 阶的完全图 K_r 的情况。

定理 8.2 设 r 和 p 是正整数且 $p\geq r\geq 2$，如果 p 阶图 G 满足：

$$q(G)\geq\left\lfloor\frac{(r-2)p^2}{2r-2}\right\rfloor+1,$$

则 G 包含 K_r 为子图。

证明 利用对 r 的归纳法，证明定理结果成立。当 $r=2$，由于至少有一条边的图包含 K_2 为子图，所以定理是正确的，当 $r=3$ 时，由定理 8.1 可得定理结果成立。假设对任意整数 $r-1(r\geq 4)$，如果 $p(p\geq r-1)$ 阶图 G 满足：

$$q(G)\geq\left\lfloor\frac{(r-3)p^2}{2r-4}\right\rfloor+1,$$

则 G 包含 K_{r-1} 作为子图。

下面利用对 p 归纳，证明：如果 $p(p\geq r)$ 阶图 G 满足：

$$q(G)\geq\left\lfloor\frac{(r-2)p^2}{2r-2}\right\rfloor+1,$$

则 G 包含 K_r 作为子图。

当 $p=r$ 时，由

$$q(G)\geq\left\lfloor\frac{(p-2)p^2}{2p-2}\right\rfloor+1=\binom{p}{2},$$

可知 $G=K_p=K_r$，从而定理结果成立。

假设对于任意 $k(r\leq k<p)$ 阶图 H，如果 H 满足：

$$q(H)\geq\left\lfloor\frac{(r-2)k^2}{2r-2}\right\rfloor+1,$$

则 H 包含 K_r 作为子图。设 G 是 p 阶图且满足：

$$q(G)\geq\left\lfloor\frac{(r-2)p^2}{2r-2}\right\rfloor+1.$$

因为

$$q(G)\geq\left\lfloor\frac{(r-2)p^2}{2r-2}\right\rfloor+1\geq\left\lfloor\frac{(r-3)p^2}{2r-4}\right\rfloor+1,$$

由对 $r-1$ 的归纳假设可知：G 包含 K_{r-1} 作为子图。设 U 是 G 中与 K_{r-1} 同构的一个子图的顶点集，且 $H=G-U$。如果存在顶点 $v\in V(H)$ 使得 $U\subseteq$

$N_G(v)$。则 G 包含子图 $K_r \cong \langle U \cup \{v\} \rangle$，定理结论成立。假设对于任意 $v \in V(H)$，$|U \cap N_G(v)| \leq r-2$。由此可得

$$q(G) \leq \binom{r-1}{2} + (p-r+1)(r-2) + \binom{p-r+1}{2}.$$

如果 $p-r+1 < r$，则 $4 \leq r < p \leq 2(r-1)$，此时，

$$\binom{r-1}{2} + (p-r+1)(r-2) + \binom{p-r+1}{2} - \frac{(r-2)p^2}{2r-2}$$

$$= \frac{1}{2r-2}\left[\left(p - \frac{3(r-1)}{2}\right)^2 - \frac{(r-1)^2}{4}\right] \leq 0。$$

所以

$$q(G) \leq \left\lfloor \frac{(r-2)p^2}{2r-2} \right\rfloor,$$

与 G 的边数至少为

$$q(G) \geq \left\lfloor \frac{(r-2)p^2}{2r-2} \right\rfloor + 1$$

的事实矛盾，由此可得 $p-r+1 \geq r$。因为 H 的阶为 $p-r+1 \geq r$ 且

$$q(H) \geq q(G) - \binom{r-1}{2} - (p-r+1)(r-2)$$

$$\geq \left\lfloor \frac{(r-2)p^2}{2r-2} \right\rfloor + 1 - \binom{r-1}{2} - (p-r+1)(r-2)$$

$$= \left\lfloor \frac{(r-2)(p-r+1)^2}{2r-2} \right\rfloor + 1,$$

由对图阶数的归纳假设可知 H 包含 K_r 作为子图，从而 G 包含 K_r 作为一个子图。■

由定理 8.2 可知对 $p \geq r \geq 2$，

$$\mathrm{ex}(p, K_r) \leq \left\lfloor \frac{(r-2)p^2}{2r-2} \right\rfloor,$$

而且，由定理 8.2 可知当 $r = 9$ 且 $p = 12$ 时，每个阶为 12 和大小至少为 63 的图包含 K_9 作为子图。事实上，每个阶为 12 且大小为 62 的图也包含 K_9 作为子图，所以定理 8.2 中提出的界对 $r \geq 4$ 不是可达的。对 $p \geq r \geq 2$ 的全部整数 p 和 r，Turán 得到了 $\mathrm{ex}(p, K_r)$ 的确切值。

在给出 Turán 结果以前，需要引入某些术语和记法。如果完全多部图满足各部分集的基数最多相差 1，则称该图为几乎正则完全多部图。如果图 G 为 p 阶几乎正则完全 k- 部图，且 $p = tk + r(0 \leq r < k, t \geq 1)$，则 G 的各部分集中肯定有 r 个部分集包含 $t+1$ 个顶点，而另外 $k-r$ 个部分集有 t 个顶点。因此 p 阶几乎正则完全 k- 部图是唯一的，记为 $R(p,k)$。又因为

$$q(\overline{R(p,k)}) = r\binom{t+1}{2} + (k-r)\binom{t}{2},$$

所以

$$q(R(p,k)) = \binom{p}{2} - r\binom{t+1}{2} - (k-r)\binom{t}{2}.$$

记 $q(p,k) = q(R(p,k))$。

定理 8.3 设 n 和 p 是整数且 $2 \leq n \leq p$。每个 p 阶且大小至少为 $q(p,n-1)+1$ 的图包含 K_n 作为子图，而且 $R(p,n-1)$ 是唯一的 p 阶且不包含子图 K_n 的极图。

证明 对 $n(n \geq 2)$ 进行归纳。当 $n = 2$ 且 $p \geq 2$ 时，图 $R(p,n-1) = R(p,1) = \overline{K_p}$，$q(p,1) = 0$，所以每个 p 阶且大小至少是 $q(p,1)+1$ 的图包含 K_2 作为子图，而且 $\overline{K_p}$ 是唯一的 p 阶空图，因此定理结果在 $n = 2$ 时成立。

假设当 $n \geq 3$ 时，每个 $s(s \geq n-1)$ 阶且大小至少为 $q(s,n-2)+1$ 的图包含 K_{n-1} 作为子图，且 $R(s,n-1)$ 是唯一的 s 阶，不包含子图 K_{n-1} 的极图。设 $p \geq n$，且 p 阶图 G 是一个不包含子图 K_n 且边数最多的图。

设顶点 v 是 G 的一个最大度顶点，即 $\deg_G(v) = \Delta(G) = \Delta$。因为 G 不含 K_n，因此由 v 的邻域 $N(v)$ 导出的子图 $\langle N(v)\rangle$ 不含 K_{n-1}。

假设 $\Delta \leq n-2$。因为 $|V(G)| = p \geq n$，故存在 G 的一个顶点 $u(u \neq v)$ 使 $uv \notin E(G)$。因为 p 阶图 G 是不包含 K_n 且边数最多的图，所以 $G + uv$ 包含一个同构于 K_n 的子图 F。又因为除了 u 和 v 以外，$G + uv$ 的其它顶点的度不会超过 $n-2$，而 F 是阶至少为 3 的 $(n-1)$- 正则图，这导致矛盾，所以 $\Delta \geq n-1$。

因为 $\langle N(v)\rangle$ 不含 K_{n-1}，故 $\langle N(v)\rangle$ 的大小不会超过图 $R(\Delta,n-2)$ 的大小 $q(\Delta,n-2)$。设 $U = \{u_i \mid 1 \leq i \leq t\}$ 是图 $G - N[v]$ 的顶点集。因为在 G 中每个顶点 $u_i(1 \leq i \leq t)$，$\deg(u_i) \leq \Delta$，故

$$q(G) \leq (t+1)\Delta + q(\Delta,n-2).$$

定义

$$G' = R(\Delta,n-2) + \overline{K_{t+1}},$$

则 G' 是 p 阶且 $q(G') = (t+1)\Delta + q(\Delta,n-2)$ 的完全 $(n-1)$- 部图。因为 G' 是 $(n-1)$- 部图，故不含 K_n 作为子图。因此

$$(t+1)\Delta + q(\Delta,n-2) = q(G') \leq q(G) \leq (t+1)\Delta + q(\Delta,n-2).$$

从而，$q(G) = (t+1)\Delta + q(\Delta,n-2)$。

下面证明 $G \cong G'$，即 G' 是唯一的、阶为 p、大小为 $(t+1)\Delta + q(\Delta,n-2)$ 的且不包含子图 K_n 的图。由 $q(G) = q(G')$ 可得：U 的每个顶点在 G 中的度是

Δ，而且 U 是独立集，因此 $U \cup \{v\}$ 也是独立集。由 $\langle N(v)\rangle$ 不包含子图 K_{n-1}，$|N(v)| = \Delta, q(\langle N(v)\rangle) = q(\Delta, n-2)$ 以及归纳假设可得 $G \cong G'$。

因为 $G = R(\Delta, n-2) + \overline{K_{t+1}}$，故 $G = K_{t+1, p_1, p_2, \cdots, p_{n-2}}$ 为完全 $(n-1)$- 部图。不妨设 $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_{n-2}$。由归纳假设可知 $R(\Delta, n-2) = K_{p_1, p_2, \cdots, p_{n-2}}$ 是几乎正则的，所以 $p_{n-2} \leq p_1 + 1$。因为 v 是 G 的最大度顶点，故 $t + 1 \leq p_1$。假设 $p_{n-2} \geq t + 3$。令 $H = K_{t+2, p_1, p_2, \cdots, p_{n-2}-1}$，故

$$q(H) - q(G) = (p_{n-2} - 1) - (t + 1) \geq 1,$$

与 G 是边数最多的性质矛盾，因此 $p_{n-2} \leq t + 2$，从而 $G = R(p, n-1)$。■

练习

1. 证明：每个 $p(p \geq 3)$ 阶且大小是 $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1$ 的图包含 P_3 作为子图，且描述 P_3 的极图。

2. 证明：每个 $p(p \geq 4)$ 阶且大小是 p 的图包含 $2K_2$ 作为子图，且描述 $2K_2$ 的极图。

3. 对 $p \geq 4$，确定 $ex(p, K_{1,3})$ 和所有 $K_{1,3}$ 的极图。

8.2 Ramsey 数

在极图理论中，最著名且最值得研究的邻域是 Ramsey 理论，在这一节和下一节将主要讨论这个专题。先从经典 Ramsey 数开始。

对于正整数 m 和 n，Ramsey 数 $r(m, n)$ 是最小正整数 p 使得对于每个 p 阶图 G，或者 G 包含 K_m 作为子图或者 $\overline{G}$ 包含 K_n 作为子图；即 G 或者包含 m 个互相邻接的顶点或者含有 n 个顶点的独立集。由于 Frand Ramsey 首先研究了上述问题，建立了理论框架，并且最终证明了 $r(m, n)$ 的上界存在，所以上述问题以他的名字命名，称为 Ramsey 数。因为对每个图 G 有 $\overline{(\overline{G})} = G$，所以 Ramsey 数 $r(m, n)$ 在上述意义下关于 m 和 n 是对称的，即 $r(m, n) = r(n, m)$。

如果 m 和 n 中至少有一个不超过 2，那么证明 $r(m, n)$ 存在是相当容易的，并且可得 $r(1, n) = 1, r(2, n) = n$。在确定其它 Ramsey 数的值时，难度随着 m 和 n 增大而明显增大，并且也不存在与 $r(1, n)$ 和 $r(2, n)$ 类似的一般公式。

有时从"边染色"的观点出发研究 Ramsey 数是很方便的。对于每个 p 阶图 G，K_p 的边集分成 G 和 $\overline{G}$ 的边集。这样 $r(m, n)$ 能看作为最小正整数 p 使得：如果 K_p 的每条边任意地以红或蓝两种颜色染色（当然，这里邻接边可以安排同样颜色），那么，或者存在一个全部边染红色的 m 阶完全子图，或者存在一

个全部边染蓝色的 n 阶完全子图。如果第一种情况出现，则称 K_p 包含一个红色 K_m；而第二种情况出现，称 K_p 含有一个蓝色 K_n。

例如对 $r(2,n)(n\geq 2)$ 可进行如下讨论：如果将 K_{n-1} 的边全染蓝色，那么 K_{n-1} 既不含红色 K_2 也不含蓝色 K_n，从而 $r(2,n)>n-1$；如果任意地用红或蓝两种颜色染 K_n 的边，那么或者全部边染上蓝色，或者其中一条边染为红色，从而或者有一个蓝色 K_n 或者有一个红色 K_2，即 $r(2,n)\leq n$，从而 $r(2,n)=n$。

定理 8.4 的证明方法给出了在 Ramsey 理论中某些共同的证明技巧。

定理 8.4 Ramsey 数 $r(3,3)=6$。

证明 因为无论 C_5 或 $\overline{C_5}\cong C_5$ 都不包含 K_3 作为子图，所以 $r(3,3)\geq 6$。

设 G 是任意一个 6 阶图，且 v 是 G 的一个顶点。显然 v 至少与 G 中三条边关联或至少与 $\overline{G}$ 中三条边关联，不失一般性，假设 vv_1,vv_2,vv_3 是 G 的边。如果 v_1v_2,v_1v_3,v_2v_3 中至少有一条是 G 的边，那么 G 包含子图 K_3，否则 v_1,v_2,v_3 是 $\overline{G}$ 中互相邻接的顶点，从而 $\overline{G}$ 包含子图 K_3。由此可得 $r(3,3)\leq 6$。结合这两个不等式，可得 $r(3,3)=6$。■

对于任意正整数 m,n，定理 8.5 不仅归纳地证明了 $r(m,n)$ 存在，同时还导出了 $r(m,n)$ 的一个上界。

定理 8.5 对于任意整数 $m(m\geq 2)$ 和 $n(n\geq 2)$，如果 $r(m,n-1)$ 和 $r(m-1,n)$ 存在，则 $r(m,n)$ 也存在，且

$$r(m,n)\leq r(m,n-1)+r(m-1,n)。\tag{8.1}$$

此外，当 $r(m,n-1)$ 与 $r(m-1,n)$ 都是偶数时，(8.1) 中严格不等式成立。

证明 设 G 是一个阶为 $t=r(m,n-1)+r(m-1,n)$ 的图，需要证明或者 G 包含 K_m 作为子图或者 $\overline{G}$ 包含 K_n 作为一个子图，设 $v\in V(G)$。因为在完全图 K_t 中，v 的度为 $r(m,n-1)+r(m-1,n)-1$，所以或者 $\deg_G(v)\geq r(m-1,n)$，或者 $\deg_{\overline{G}}(v)\geq r(m,n-1)$。

如果 $\deg_G(v)\geq r(m-1,n)$，记 $S=N_G(v)$，则可得或者 $G_1=\langle S\rangle_G$ 包含子图 K_{m-1}，或者 $\overline{G_1}$ 包含子图 K_n。如果 $\overline{G_1}$ 包含子图 K_n，则 $\overline{G}$ 也包含子图 K_n。如果 G_1 包含子图 K_{m-1}，则由于在 G 中顶点 v 与 S 中每个顶点邻接，故 G 包含子图 K_m，从而在这种情况下，$K_m\subseteq G$ 或 $K_n\subseteq\overline{G}$。

如果 $\deg_{\overline{G}}(v)\geq r(m,n-1)$，令 $T=V(G)/N[v]$，$G_2=\langle T\rangle_{\overline{G}}$，则 $|T|=p(G_2)\geq r(m,n-1)=r(n-1,m)$。从而或者 G_2 包含子图 K_{n-1}，或者 $\overline{G_2}$ 包含子图 K_m。由于 $G_2\subset\overline{G}$，$\overline{G_2}\subset G$ 且在 G 中 v 不与 T 的任意顶点邻接，所以或者 G 包含子图 K_m，或者 $\overline{G}$ 包含子图 K_n。

因为 G 是任意一个阶为 $r(m-1,n)+r(m,n-1)$ 的图，所以 $r(m,n)$ 存在且(8.1) 式成立。

假设 $r(m-1,n)$ 和 $r(m,n-1)$ 是两个偶数，且 G 是任意一个阶为 $r(m-1,n)+r(m,n-1)-1$ 的图，下面证明或者 G 包含子图 K_m 或者 $\overline{G}$ 包含子图 K_n。

因为 $p(G)$ 为奇数，故在 G 中存在偶顶点 v。如果 $\deg_G(v)\geq r(m-1,n)$，那么由上述证明可得或者 G 包含子图 K_m，或者 $\overline{G}$ 包含子图 K_n。另一方面，如果 $\deg_G(v)<r(m-1,n)$，则 $\deg_G(v)\leq r(m-1,n)-2$，从而 $\deg_{\overline{G}}(v)>r(m,n-1)$，由上述证明仍然可得或者 G 包含子图 K_m，或者 $\overline{G}$ 包含子图 K_n。从而定理结果成立。■

定理 8.6 对于任意两个正整数 m 和 n，

$$r(m,n)\leq\binom{m+n-2}{m-1}.$$

证明 对 $k=m+n$ 进行归纳。由 $r(1,n)=1(n\geq 1)$ 和 $r(2,n)=n(n\geq 2)$ 可得当 $k\leq 5$ 或者 $\min\{m,n\}\leq 2$ 时，定理结果成立，从而可假设 $m\geq 3$，$n\geq 3$。由定理 8.4 可得当 $k=6$ 时，定理结果成立。

假设对任意 $m'\geq 3$，$n'\geq 3$ 且 $m'+n'<k(k>6)$，

$$r(m',n')\leq\binom{m'+n'-2}{m'-1}.$$

设 $m\geq 3$，$n\geq 3$ 且 $m+n=k$，由归纳假设可知 $r(m-1,n)$ 和 $r(m,n-1)$ 满足：

$$r(m-1,n)\leq\binom{m+n-3}{m-2}\text{且}$$

$$r(m,n-1)\leq\binom{m+n-3}{m-1}.$$

由(8.1)式可得

$$\begin{aligned}r(m,n)&\leq r(m-1,n)+r(m,n-1)\\&\leq\binom{m+n-3}{m-2}+\binom{m+n-3}{m-1}\\&=\binom{m+n-2}{m-1}.\end{aligned}$$

从而定理结果成立。■

容易验证，当 $\min\{m,n\}\leq 2$ 时，定理 8.6 给出的关于 $r(m,n)$ 的界正好是 $r(m,n)$ 的值；当 $m=n=3$ 时，这个界也是最好的。由定理 8.6 可得：

$$r(3,n)\leq\frac{n^2+n}{2}\qquad(n\geq 3).$$

对于 $r(3,n)$ 的这个界，可作进一步改进。

定理 8.7 对任意 $n \geq 3$，

$$r(3,n) \leq \frac{n^2+3}{2}。 \tag{8.2}$$

证明 对 n 进行归纳。当 $n=3$ 时，$r(3,n)=6$，而 $(n^2+3)/2=6$，所以 (8.2) 在 $n=3$ 时成立。假设在 $n-1$ 时，$r(3,n-1) \leq [(n-1)^2+3]/2$ $(n \geq 4)$。由定理 8.5 可得：

$$r(3,n) \leq n + r(3,n-1), \tag{8.3}$$

而且当 n 和 $r(3,n-1)$ 两个都是偶数时，严格不等式成立。结合(8.3) 和归纳假设可得

$$r(3,n) \leq r(2,n) + r(3,n-1) \leq n + \frac{(n-1)^2+3}{2} = \frac{n^2+4}{2} \tag{8.4}$$

为了完成定理证明，只要证明(8.4) 严格不等式成立即可。

如果 n 是奇数，则 n^2+4 是奇数，从而 $r(3,n) < (n^2+4)/2$。因此可以假设 n 是偶数。如果 $r(3,n-1) < [(n-1)^2+3]/2$，那么(8.4) 不等式严格成立。另一方面，如果 $r(3,n-1) = [(n-1)^2+3]/2 = n^2/2 - n + 2$，因为 n 是偶数，故 $r(3,n-1)$ 是偶数，从而(8.4) 严格不等式成立。■

根据定理 8.7 可得，$r(3,4) \leq 9$，$r(3,5) \leq 14$。实际上，这两种情况等式都成立。对于等式 $r(3,5)=14$ 可采用如下方法得到，因为存在一个 13 阶的图使得它既不包含一个三角形也不包含 5 个顶点的独立集，即 $K_3 \not\subseteq G$ 且 $K_5 \not\subseteq \overline{G}$（见图 8.1），从而 $r(3,5) \geq 14$。又因为 $r(3,5) \leq 14$，所以 $r(3,5)=14$。

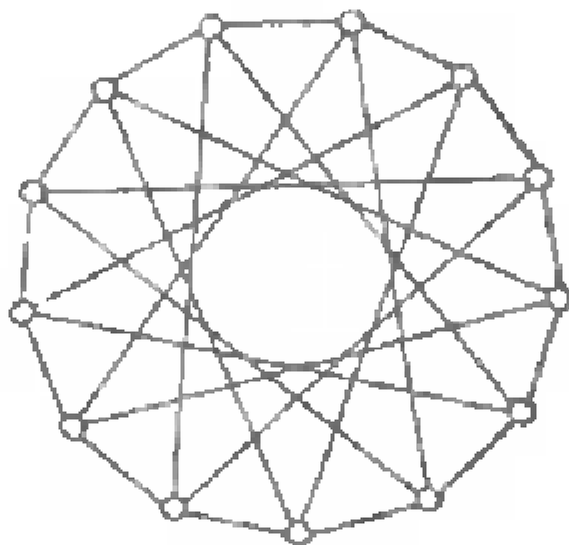


图 8.1 $r(3,5) \geq 14$ 的一个极图

定理 8.6 也给了一个关于"对角线"(即 $m=n$)Ramsey 数 $r(n,n)$ 的上界，$r(n,n) \leq \binom{2n-2}{n-1}$。对于 $r(n,n)$ 的下界可用三种方式得到：概率方法、计数法和构造法。在构造法中，确定 $r(n,n)$ 的一个下界是通过构造一个适当的图使得这个图不管是它本身还是它的补图都不包含子图 K_n，不过一般说来，随着 n 的增大，这种方法是很难行得通的。更好的下界是运用计数方法得到的。这里就思想方法作一个简单介绍：假设希望证明存在一个 p 阶图 G 有某种已知性质 P，如果能够估计不具有性质 P 的 p 阶图的数目，且能证明这个数是严格地小于 p 阶图的总数。

那么必然存在一个具有性质 P 的 p 阶图 G。当然，这个过程并没有提供构造图 G 的方法。1947 年，Erdös 首先运用计数方法建立了 $r(n,n)$ 的一个下界。

定理 8.8 对任意 $n \geq 3$，

$$r(n,n) > \lfloor 2^{n/2} \rfloor.$$

证明 设 $p = \lfloor 2^{n/2} \rfloor$，下面证明：存在一个 p 阶图 G 使得 G 和 $\overline{G}$ 都不包含子图 K_n。

假设所有考虑的图是标定图，即认为所有顶点是有标记的，也就是说，认为两个图是相同的（或者恒等的）当且仅当对于任意一对顶点 v_i, v_j，它们同时有边相连或无边相连。由于所有的无序顶点对 $\{v_i, v_j\}$ 的个数为 $\binom{p}{2}$，而对于取定 的两个顶点 v_i, v_j，在构造图时，都有连接或不连接它们的两种方法，因此有同样顶点集 V 的 p 阶非恒等图的个数是 $2^{\binom{p}{2}}$ 个。

对 V 的每个 n 元子集 $S(|S| = n)$，由 S 导出一个完全图的所有图的个数是 $2^{\binom{p}{2}-\binom{n}{2}}$。

如果 M 表示包含一个与 K_n 同构子图且不恒等图的个数，那么

$$M \leq \binom{p}{n} 2^{\binom{p}{2}-\binom{n}{2}} < \frac{p^n}{n!} 2^{\binom{p}{2}-\binom{n}{2}}. \tag{8.5}$$

由假设 $p \leq 2^{n/2}$，因此 $p^n \leq 2^{n^2/2}$。又因为 $n \geq 3$，故 $2^{\frac{n^2}{2}} < \frac{1}{2} n! 2^{\binom{n}{2}}$，从而

$$p^n < \frac{n!}{2} 2^{\binom{n}{2}}. \tag{8.6}$$

结合(8.5)和(8.6)得到

$$M < \frac{1}{2} 2^{\binom{p}{2}}.$$

如果列出具有顶点集 V 且包含与 K_n 同构子图的 M 个非恒等图以及它们的补图，那么在这个所列表中至多有 $2M < 2^{\binom{p}{2}}$ 个不恒等图。因为有 $2^{\binom{p}{2}}$ 个具有顶点 V 的不恒等的图，所以，存在一个具有顶点集 V 的图 G 使得 G 和 $\overline{G}$ 在前述表中都不出现，即 G 和 $\overline{G}$ 都不含与 K_n 同构的子图。■

由定理 8.6 和定理 8.8 可得 $4 < r(4,4) \leq 20$，实际上 $r(4,4) = 18$（见本节练习 5）。迄今为止，对于 $3 \leq m \leq n$，已知的 Ramsey 数有

$$r(3,3) = 6,\ r(3,6) = 18,\ r(3,9) = 36,$$
$$r(3,4) = 9,\ r(3,7) = 23,\ r(4,4) = 18,$$
$$r(3,5) = 14,\ r(3,8) = 28 \text{ 和 } r(4,5) = 25.$$

练习

1. 证明：对任意正整数 m 和 n，$r(m,n) = r(n,m)$。

2. 证明：如果 G 是一个阶为 $r(m,n)-1$ 的图，则

(a) $K_{m-1} \subseteq G$ 或 $K_n \subseteq \overline{G}$

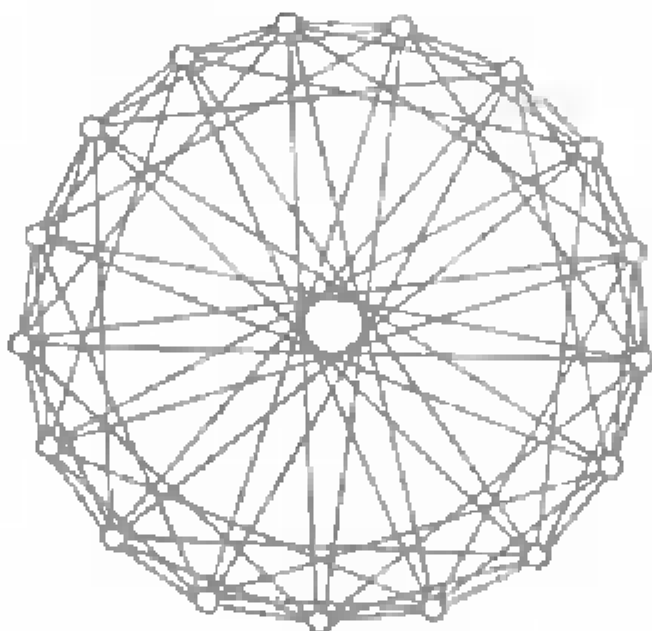
(b) $K_m \subseteq G$ 或 $K_{n-1} \subseteq \overline{G}$

3. 证明：如果 $2 \leq m' \leq m$ 且 $2 \leq n' \leq n$，则 $r(m',n') \leq r(m,n)$，且等式成立当且仅当 $m'=m$ 和 $n'=n$。

4. 证明：$r(3,4)=9$

5. 右图的阶为 17，且既不含 4 个互相邻接顶点，也不含 4 个顶点的独立集，因此 $r(4,4)>17$。证明：$r(4,4)=18$。

6. Ramsey 数 $r(3,5)$ 还是未知数，建立关于这个数的上、下界（须有说明）。



8.3 广义 Ramsey 数

对于正整数 n_1 和 n_2，在 8.2 中讨论的经典 Ramsey 数 $r(n_1,n_2)$ 也可定义为最小正整数 p 使得对任何因子分解 $K_p=F_1\oplus F_2$（因而 $F_2=\overline{F_1}$），或者 $K_{n_1}\subseteq F_1$ 或者 $K_{n_2}\subseteq F_2$。以这种方式定义的 Ramsey 数，启发我们作各种有趣的推广。在这一节，对于迅速发展的 Ramsey 理论领域，我们只考虑众多研究方向中最简单的一个方向。设 $G_1,G_2,\cdots,G_k(k\geq 2)$ 是 k 个图，广义 Ramsey 数 $r(G_1,G_2,\cdots,G_k)$ 定义为最小正整数 p 使得对 K_p 的任何 k 个因子分解

$$K_p=F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_k,$$

存在 $1\leq i\leq k$ 满足图 G_i 是 F_i 的子图。由广义 Ramsey 数的定义可得 $r(K_{n_1},K_{n_2})=r(n_1,n_2)$，因此用 $r(n_1,n_2,\cdots,n_k)$ 表示 $r(K_{n_1},K_{n_2},\cdots,K_{n_k})$。

定理 8.9 对于任意给定的图 $G_1,G_2,\cdots,G_k(k\geq 2)$，广义 Ramsey 数 $r(G_1,G_2,\cdots,G_k)$ 存在。

证明 设 $p_i=p(G_i)(1\leq i\leq k)$。由于对于任意 $1\leq i\leq k$，$G_i\subseteq K_{p_i}$，从而 $r(G_1,G_2,\cdots,G_k)\leq r(p_1,p_2,\cdots,p_k)$，由此可得，只要证明 $r(p_1,p_2,\cdots,p_k)$ 存在即可。

对 k 进行归纳。当 $k=2$ 时，由定理 8.5，对任意正整数 p_1 和 p_2，$r(p_1,p_2)$ 存在。假设对任意 $k-1(k\geq 3)$ 个正整数 $n_i(1\leq i\leq k-1)$，$r(n_1,n_2,\cdots,n_{k-1})$

存在。当 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是任意给定的 k 个正整数时，下面证明 $r(p_1,p_2,\cdots,p_k)$ 存在。

由归纳假设可知 $r(p_1,p_2,\cdots,p_{k-1})$ 存在，设 $p_0=r(p_1,p_2,\cdots,p_{k-1})$ 且 $r(p_0,p_k)=p$，我们证明 $r(p_1,p_2,\cdots,p_k)\leq p$。

设 $K_p=F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_k$ 是 K_p 的任意 k 个因子的分解，且 $H=F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_{k-1}$，所以 $K_p=H\oplus F_k$。由于 $r(p_0,p_k)=p$，故 $K_{p_0}\subset H$ 或者 $K_{p_k}\subset F_k$。如果 $K_{p_k}\nsubseteq F_k$，则 $K_{p_0}\subseteq H$。设 V_0 为 H 中 p_0 个两两相互邻接的顶点集，且 $F'_i=\langle V_0\rangle_{F_i}(1\leq i\leq k-1)$。因为 $H=F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_{k-1}$，从而 $K_{p_0}=F'_1\oplus F'_2\oplus\cdots\oplus F'_{k-1}$。由归纳假设可得存在 $1\leq i\leq k-1$ 使得 $K_{p_i}\subseteq F'_i\subseteq F_i$。

从而对于 K_p 的任意 k 个因子的分解 $K_p=F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_k$，存在 $1\leq i\leq k$ 使得 $K_{p_i}\subseteq F_i$，即 $r(p_1,p_2,\cdots,p_k)\leq p$。■

已经知道 $r(3,3,3)=17$，但在一般情况下，$r(n_1,n_2,\cdots,n_k)(k\geq 2)$ 除了上一节提到的结果以外，还没有得到其它非平凡值。也许令人感到有些奇怪的是当 $G_i(1\leq i\leq k)$ 不是完全图时，对于 $r(G_1,G_2,\cdots,G_k)$ 的计算却有一个相当成功的例子。

在这个方向上，Chvátal 得到了一个最有趣的结果 —— 确定了 Ramsey 数 $r(T_m,K_n)$，其中 T_m 是阶为 m 的任意树。这个很出色的结果却有一个相当简单的证明。

定理 8.10(Chvátal)　如果 T_m 是任意一个 $m(m\geq 1)$ 阶树且 n 为正整数，那么

$$r(T_m,K_n)=1+(m-1)(n-1)。$$

证明　当 $m=1$ 或 $n=1$ 时，容易验证 $r(T_m,K_n)=1=1+(m-1)(n-1)$。因此可以假设 $m\geq 2$ 且 $n\geq 2$。设图 $F\cong(n-1)K_{m-1}$，因为 F 的每个分支的阶为 $m-1$，所以 F 不包含 T_m 作为子图。另一方面，完全 $(n-1)$- 部图 $\overline{F}\cong K_{m-1,m-1,\cdots,m-1}$ 也不含子图 K_n，所以 $r(T_m,K_n)\geq 1+(m-1)(n-1)$。

设 F 是阶为 $1+(m-1)(n-1)$ 的任意一个图，下面证明：$T_m\subseteq F$ 或 $K_n\subseteq\overline{F}$，即 $r(T_m,K_n)\leq 1+(m-1)(n-1)$，从而完成定理的证明。如果 K_n 不是 $\overline{F}$ 的子图，那么 $\beta(F)\leq n-1$。由于 F 的阶为 $1+(m-1)(n-1)$ 且 $\beta(F)\leq n-1$，故 $\chi(F)\geq m$（见第 7.1 节练习 1）。设 H 是 F 的临界 m- 色子图，由推论 7.1b，$\delta(H)\geq m-1$。根据定理 3.6 可得 $T_m\subset H$，故 $T_m\subset F$。■

在大多数情况下，对于 $k\geq 3$，确定 Ramsey 数 $r(G_1,G_2,\cdots,G_k)$ 的证明都是相当困难的，只有很少几类取得了某些实质性的进展。在这方面可以作为一

个例子的是由Burr和Roberts得到的一个结果：如果对于任意$1\le i\le k(k\ge 2)$，$G_i\cong K_{1,n_i}$，则

$$r(K_{1,n_1},K_{1,n_2},\cdots,K_{1,n_k})=\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)+\theta_t,$$

其中t为$\{n_i|1\le i\le k\}$中偶数的个数，且当t是正偶数时$\theta_t=1$，否则$\theta_t=2$。特别在$k=2$时可得：

$$r(K_{1,m},K_{1,n})=\begin{cases}m+n-1 & \text{如 } m \text{ 和 } n \text{ 二个都是偶数}\\ m+n & \text{否则。}\end{cases}$$

设给定图$G_1,G_2,\cdots,G_k(k\ge 2)$，则广义Ramsey定理可以描述为：如果$G$是阶充分大的完全图，那么对$G$的任意$k$个因子的分解$G=F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_k$，存在$1\le i\le k$使得$G_i\subseteq F_i$。由此，可提出下面的定义：设给定图$G,G_1,G_2,\cdots,G_k(k\ge 2)$，如果对$G$的任意$k$个因子的分解$G=F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_k$，存在$1\le i\le k$，使得$G_i\subseteq F_i$，则称$G$指向$G_1,G_2,\cdots,G_k$，记为$G\to(G_1,G_2,\cdots,G_k)$（注意：在这里$G$可以不是完全图）。那么自然存在问题：对已知图$G_1,G_2,\cdots,G_k$，确定图$G$使得$G\to(G_1,G_2,\cdots,G_k)$。

不过，一般说来，这个问题是极其困难的，只是在少数特殊情况下，上面提到的问题已经解决。自然最受人注意的是在$k=2$时，如果已知图G_1和G_2，且$G\to(G_1,G_2)$，那么图G可能具有什么样的性质。例如，如果$G\to(K_m,K_n)(m,n\ge 2)$，那么显然$\omega(G)\ge\min\{m,n\}$，并且也容易得到G的阶至少是$r(m,n)$，即如果是$G\to(K_m,K_n)$，那么$p(G)\ge r(m,n)$。Burr，Erdös和Lovász证明了在色数中类似的结果也成立。

定理8.11 对于任意正整数m和n，如果$G\to(K_m,K_n)$，那么$\chi(G)\ge r(m,n)$。

证明 这个结果在$m=1$或$n=1$时，显然成立，因此可以假设$m\ge 2$且$n\ge 2$，故$r=r(m,n)\ge 2$。利用反证法，假设$\chi(G)\le r-1$。因为$p(G)\ge r$，故存在G的一个$(r-1)$-染色使得颜色类为$U_1,U_2,\cdots,U_{r-1}$。

由$r=r(m,n)$的定义，存在K_{r-1}的一个因子分解$K_{r-1}=F_1\oplus F_2$使得$K_m\not\subseteq F_1$且$K_n\not\subseteq F_2$。设K_{r-1}的顶点集$V(K_{r-1})=\{v_1,v_2,\cdots,v_{r-1}\}$。

因为$U_i(1\le i\le r-1)$为G的独立集，所以对于任意$e\in E(G)$，存在$1\le j<k\le r-1$，$u_j\in U_j$及$u_k\in U_k$使得$e=u_ju_k$，从而可定义G的因子分解$G=G_1\oplus G_2$使得$E(G_i)=\{u_ju_k|u_j\in U_j,u_k\in U_k\text{ 且 }v_jv_k\in F_i\}(i=1,2)$。

假设$K_m\subseteq G_1$，因此G_1包含了m个相互邻接的顶点$w_1,w_2,\cdots,w_m$，且存在不同的颜色类$U_{i_1},U_{i_2},\cdots,U_{i_m}$使得对任意$i=1,2,\cdots,m$，$w_j\in U_{i_j}$。由$E(G_1)$的构造方法可得$\langle\{v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_m}\}\rangle_{F_1}\cong K_m$，这是不可能的，因此$K_m\not\subseteq G_1$。类似可

得 $K_n \not\subseteq G_2$，故 $G \not\to (K_m, K_n)$，这是一个矛盾，因此 $\chi(G) \geq r$，从而完成了证明。■

推论 8.11 对任意正整数 m 和 n，如果 $G \to (K_m, K_n)$，那么 $q(G) \geq q(K_r)$，其中 $r = r(m,n)$。

对任意图 G_1 和 G_2，如果 $G \to (G_1, G_2)$，那么 $p(G) \geq r$，其中 $r = r(G_1, G_2)$，不过，一般说来 $\chi(G) \geq r$ 或 $q(G) \geq \binom{r}{2}$ 是不正确的。

练习

1. 证明：$r(3,3,3) \leq 17$。

2. 证明：对于任意给定图 $G_1, G_2, \cdots, G_k (k \geq 2)$，$r(G_1, G_2, \cdots, G_k, K_2) = r(G_1, G_2, \cdots, G_k)$。

3. 证明：对于任意正整数 $n_1, n_2, \cdots, n_k (k \geq 2)$，$r(K_{n_1}, K_{n_2}, \cdots, K_{n_k}, T_m) = 1 + (r-1)(m-1)$，其中 T_m 是任意一个 $m(m \geq 1)$ 阶树且 $r = r(n_1, n_2, \cdots, n_k)$。

4. 设 $m(m \geq 3)$ 和 $n(n \geq 1)$ 是整数，证明：

$$r(C_m, K_{1,n}) = \begin{cases} 2n+1 & \text{如果 } m \text{ 是奇数且 } m \leq 2n+1 \\ m & \text{如果 } m \geq 2n\text{。} \end{cases}$$

注意：上述结果中不包括 m 是偶数且 $m < 2n$ 的情况。

5. 设 G_1 是最大分支的阶为 m 的图，并设 G_2 是满足 $\chi(G_2) = n$ 的图，证明：$r(G_1, G_2) \geq 1 + (m-1)(n-1)$。

6. 证明：如果图 G，G_1 和 G_2 满足 $G \to (G_1, G_2)$，那么 $p(G) \geq r(G_1, G_2)$。

7. 证明推论 8.11。

9 有向图

迄今为止，我们所说的图和由它所描述的关系都是对称关系，但在现实生活中存在许多关系不是对称的。如认识关系，甲认识乙，并不意味着乙也认识甲。又如一项工程中工序之间存在先后关系；比赛中的胜负关系等。现在从这些不对称的关系中抽象出有向图的概念，并建立相关理论，这些理论中不少是和一般图的理论可平行建立的。

9.1 有向图的概念

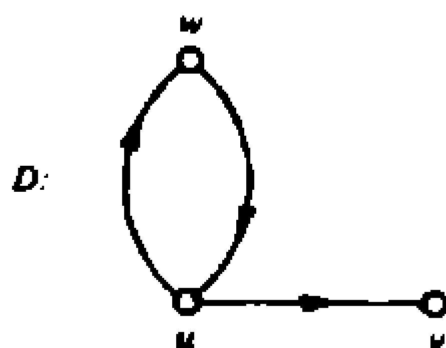


图 9.1 一个有向图

由有限的非空元素集和它的不同元素的有序对集(可能是空集)组成的结构称为有向图，记为 D，有限非空元素集称为 D 的顶点集，记为 $V(D)$，$V(D)$ 中的元素称为 D 的顶点，且不同顶点的有序对集称为 D 的弧集，记为 $A(D)$。图 9.1 表示 $V(D)=\{u,v,w\}$ 和 $A(D)=\{(u,w),(w,u),(u,v)\}$ 的有向图。当有向图用画图的方式来表示时，每条弧的方向就由箭头来指定。

在讨论有向图时，使用的术语完全可以类似于图中所使用的术语。有向图 D 的顶点集的基数称为 D 的阶，用 $p(D)$ 表示；弧集的基数称为 D 的大小，用 $q(D)$ 来表示，简单地就把它们分别记为 p 和 q。故 (p,q) 有向图就是有 p 个顶点 q 条弧的有向图。如 $a=(u,v)$ 是有向图 D 的一条弧，那么称 a 是连接 u 到 v 的，更确切地，可称 a 是从 u 关联到 v，而 u 是关联到 a 的，v 是从 a 关联的，另外，称 u 是邻接到 v，而 v 是从 u 邻接的。在图 9.1 中的有向图，顶点 u 邻接到顶点 v，但 v 不邻接到 u。有向图 D 中顶点 u 和 v 是不邻接的，如果 u 既不邻接到 v，也不从 v 邻接。

有向图 D 的顶点 v 的出度 $\mathrm{od}(v)$ 是 D 中从 v 邻接的顶点个数。v 的入度 $\mathrm{id}(v)$ 是 D 中邻接到 v 的顶点个数，D 的顶点 v 的度 $\deg(v)$ 定义为

$$\deg(v)=\mathrm{od}(v)+\mathrm{id}(v)。$$

在图 9.1 中，有向图 D 有 $\mathrm{od}(u)=2$，$\mathrm{id}(u)=1$，$\mathrm{od}(w)=1$，$\mathrm{id}(w)=1$，

$\mathrm{id}(v)=1$，$\mathrm{od}(v)=0$，而 $\deg(u)=3$，$\deg(w)=2$ 且 $\deg(v)=1$。现在我们提出“有向图论第一定理”。

定理 9.1 如果 D 是 (p,q) 有向图且 $V(D)=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$，那么

$$\sum_{i=1}^{p}\mathrm{od}(v_i)=\sum_{i=1}^{p}\mathrm{id}(v_i)=q。$$

设 D_1 和 D_2 为两个有向图，如果存在一一对应 $\phi:V(D_1)\to V(D_2)$ 使得对任意 $u,v\in V(D)$，$(u,v)\in A(D_1)$ 当有仅当 $(\phi(u),\phi(v))\in A(D_2)$，则称有向图 D_1 与 D_2 同构，记为 $D_1\cong D_2$，且称 ϕ 为同构映射。有向图集上的同构关系是一个等价关系，同构关系把有向图集分成等价类，两个有向图是不同构的当且仅当它们属于不同的等价类。从同构的观点看，只有唯一的 (1,0) 有向图是平凡有向图。同样，也只有唯一的 (2,0)，(2,1)，(2,2) 有向图。有四个 (3,3) 有向图，图 9.2 表示了这些有向图。

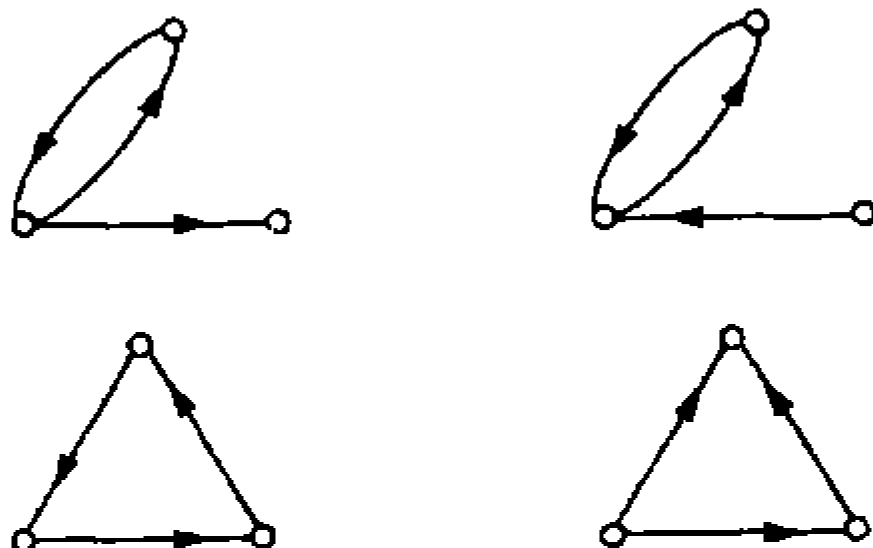


图 9.2 (3,3) 有向图

如果两个有向图 D_1 和 D_2 满足 $V(D_1)\subseteq V(D_2)$ 且 $A(D_1)\subseteq A(D_2)$，则称 D_1 是 D_2 的有向子图，记为 $D_1\subseteq D_2$。如果 D_1 和 D 是有向图，而且存在 D 的有向子图 D_2 使得 $D_1\cong D_2$，那么 D_1 也称为 D 的有向子图。设有向图 D_1 是有向图 D 的有向子图，如果 D_1 满足 $|V(D_1)|<|V(D)|$ 或者 $|A(D_1)|<|A(D)|$，则称 D_1 为 D 的有向真子图，记为 $D_1\subset D$；如果 $|V(D_1)|=|V(D)|$，则称 D_1 为 D 的有向生成子图，

如果 D 是非平凡有向图且 $v\in V(D)$，那么 $D-v$ 是从 D 中删除顶点 v 和所有从 v 关联的，或者关联到 v 的所有弧以后得到的 D 的有向子图。如果 $a\in A(D)$，那么 $D-a$ 是从 D 中删除弧 a 得到的 D 的有向子图。对于有向图 D 的顶点子集 S 和弧子集 T，可类似地定义 D 的有向子图 $D-S$ 和 $D-T$。

如果 D 是有向图 $u,v\in V(D)$，$u\neq v$ 且 $(u,v)\notin A(D)$，那么有向图 $D+a(a=(u,v))$ 为向 D 添加弧 a 得到的有向图。

如果 U 是有向图 D 的非空顶点子集，那么由 U 导出的 D 的有向子图 $\langle U\rangle$ 定义为：顶点集为 U 且弧集是 D 中所有连接 U 中两个顶点的弧。对于 $V(D)$ 的

某个子集 U，若 $D_1 \cong \langle U \rangle$，则称 D_1 也是 D 的有向导出子图，记为 $D_1 \prec D$。如果 F 是 $A(D)$ 的非空子集，那么由 F 导出的有向子图定义为：弧集是 F，且顶点集是由至少与 F 中一条弧关联的这些 D 的顶点组成的顶点子集，记为 $\langle F \rangle$。同图一样，有向图 D 的每个顶点导出子图都能够通过从 D 中删去顶点而得到，而 D 的每个有向子图都能够通过删去 D 的顶点和弧来产生。对于有向图 D 的这些概念，我们能用图 9.3 来说明。这里，$V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，$U = \{v_1, v_2, v_3\}$ 且 $F = \{(v_1, v_2), (v_2, v_4)\}$。

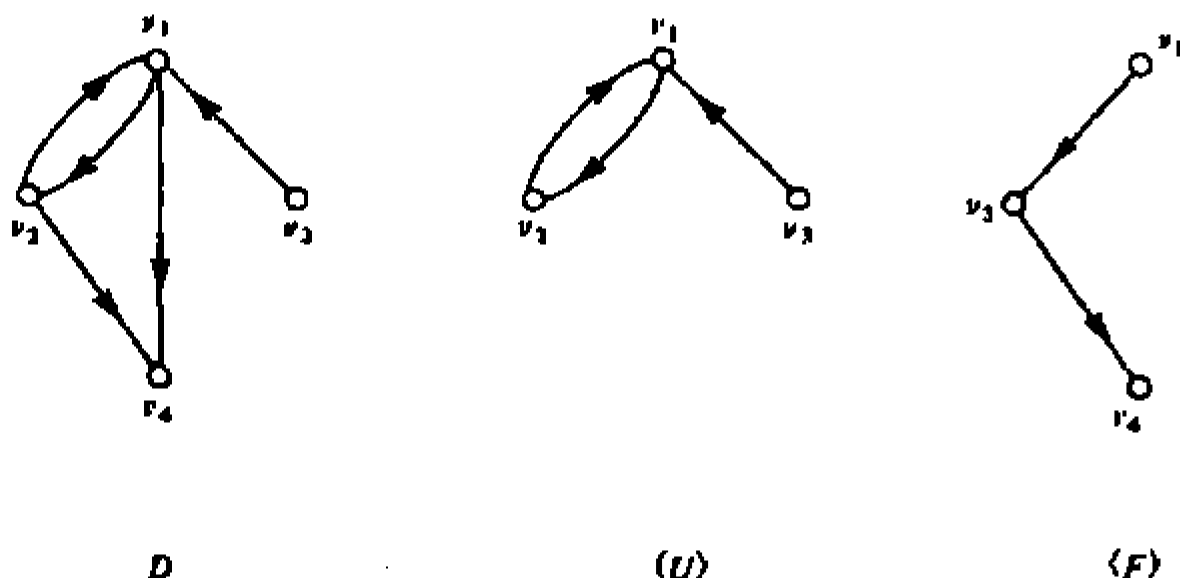


图 9.3　D 的导出有向子图和弧导出有向子图

下面提到的一些比较典型的有向图在以后的讨论中经常出现。设 D 为有向图，如果对任意 $(u,v) \in A(D)$，有 $(v,u) \in A(D)$，则称有向图 D 是对称的。实际上，对称有向图集和图集之间存在本质上的一一对应关系。如果对任意 $(u,v) \in A(D)$，有 $(v,u) \notin A(D)$，则称有向图 D 是定向图。设 G 是任意图，如果对图 G 的每条边指定一个方向，那么 G 就成为有向图 D，G 的每条边就成为 D 的弧，而且 D 是定向图，此时，称 D 是 G 的定向。图 9.4 中有向图 D_1 是对称的，而有向图 D_2 是定向图，D_3 既不是对称有向图，也不是定向图。

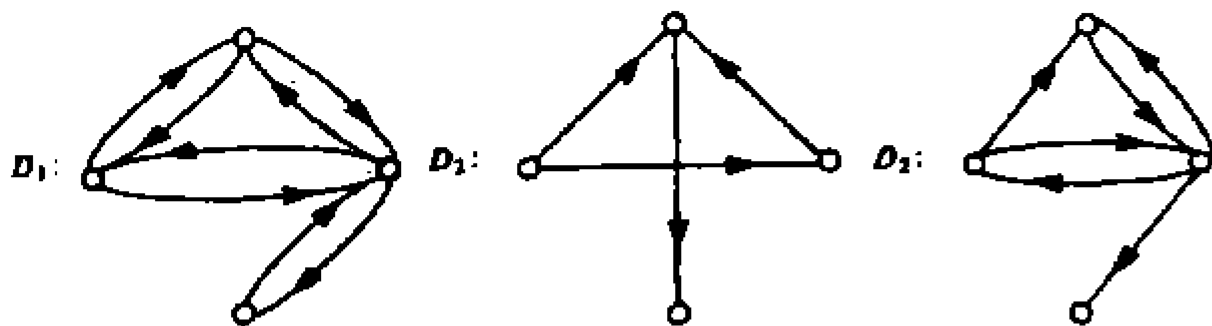


图 9.4　对称有向图和定向图

如果有向图 D 满足：对 D 的任意 $u, v \in V(D)(u \neq v)$，或者 $(u,v) \in A(D)$，或者 $(v,u) \in A(D)$，或者 $(u,v),(v,u) \in A(D)$，即这两条弧中至少有

一条是属于D的，则称D为有向完全图。p阶完全对称有向图用K_p^*表示，显然$|A(K_p^*)| = p(p-1)$，而对K_p^*的每个顶点v，$\mathrm{od}(v) = \mathrm{id}(v) = p-1$，图 9.5 给出有向图$K_1^*$，$K_2^*$，$K_3^*$和$K_4^*$。

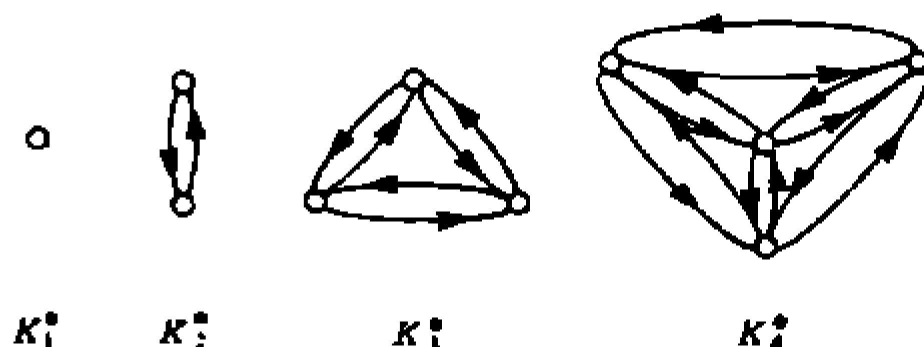


图 9.5 完全对称有向图

完全定向图称为竞赛图，对于竞赛图以后还将讨论。

如果对有向图D中的每个顶点v，$\mathrm{od}(v) = \mathrm{id}(v) = r$，则称$D$为$r$度正则的或$r$-正则的。有向图$K_p^*$是$(p-1)$-正则的，图 9.6 表示的是 1-正则有向图$D_1$和 2-正则有向图$D_2$，而$D_2$又是一个竞赛图。

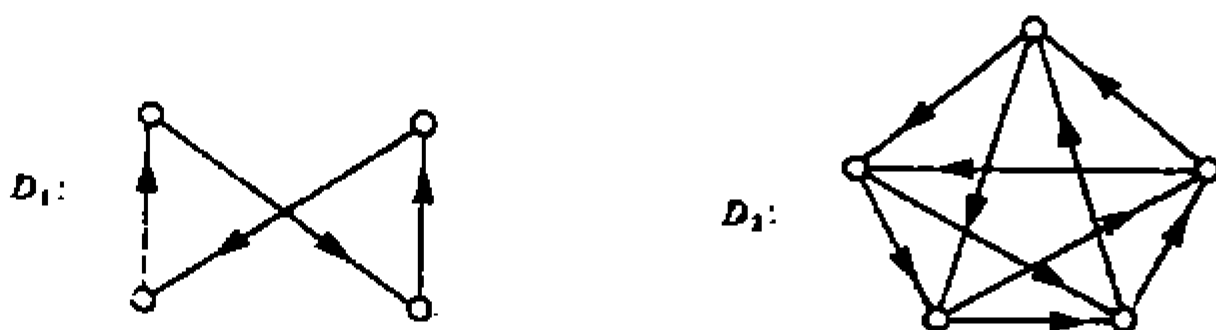


图 9.6 正则有向图

设D是有向图，如果构造图G满足：$V(G) = V(D)$且$E(G) = \{uv \mid (u,v) \in A(D)$或者$(v,u) \in A(D)\}$，称图$G$为有向图$D$的基础图，图 9.7 表示的是图 9.1 中的有向图的基础图。

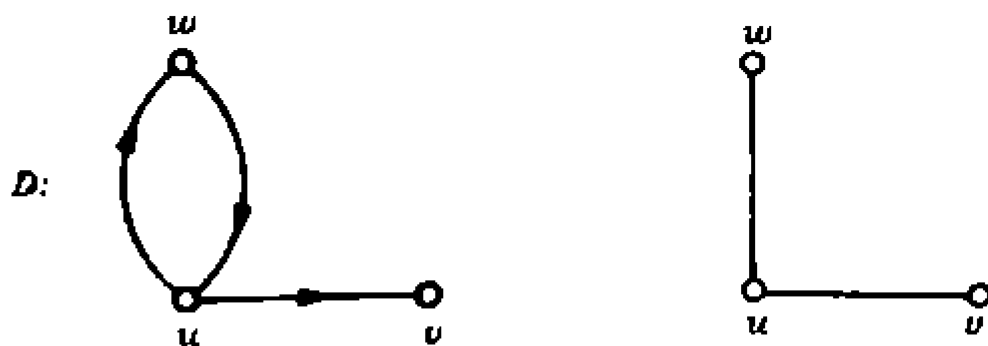


图 9.7 有向图和它的基础图

在图中所讨论的途径、迹、路、回路和圈的概念都可类似地推广到有向图，主要的区别在于有向图的一条途径中（从而在一条迹、路、回路和圈中）必须

指出弧的方向，如果W是D中从u到v的一条有向途径，那么W是从顶点u开始，在顶点v结束的有限顶点和弧交替序列

$$W = u_0a_1u_1a_2u_2a_3\cdots u_n,$$

其中：$u_0 = u, u_n = v$且对任意$1 \leq i \leq n, a_i = (u_{i-1}, u_i)$。就象与图中途径一样，只要排定了途径中的顶点，则弧就是确定的，从而可以将有向途径W简记为$W = u_0u_1u_2\cdots u_n$，并且数n称为途径的长度。关于有向图中平凡途径、相同途径、开或者闭途径以及迹、路、回路和圈的概念都可类似定义。仅对有向图的术语是所谓"半途径"。D中一条$u—v$半途径是从u开始到v结束的有限的顶点和弧交替序列

$$u_0a_1u_1a_2u_2a_3\cdots u_n,$$

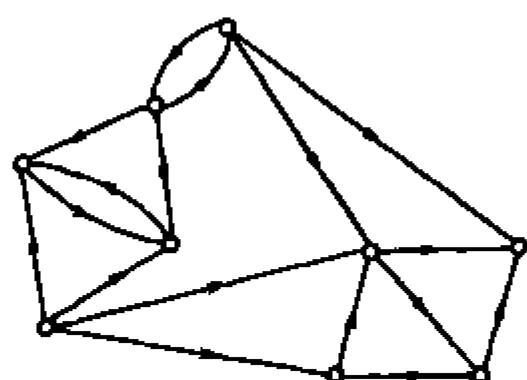
其中：$u_0 = u, u_n = v$且对任意$1 \leq i \leq n, a_i = (u_{i-1}, u_i)$或者$a_i = (u_i, u_{i-1})$。如果顶点$u_1, u_2, \cdots, u_n$是互不相同的，那么就称$u—v$半途径为$u—v$半路；如果$u_0 = u_n (n \geq 3)$，且顶点$u_1, u_2, \cdots, u_n$是互不相同的，则称这个半路为半圈。

设D为有向图，如果对任意$u, v \in V(D)$，$(u \neq v)$，D中存在$u—v$半路（当然，如果D中存在$u—v$半路，则D中也有$v—u$半路），则称有向图D是连通的或弱连通的。由有向图的连通定义可知有向图D是连通的等价于D的基础图是连通的。

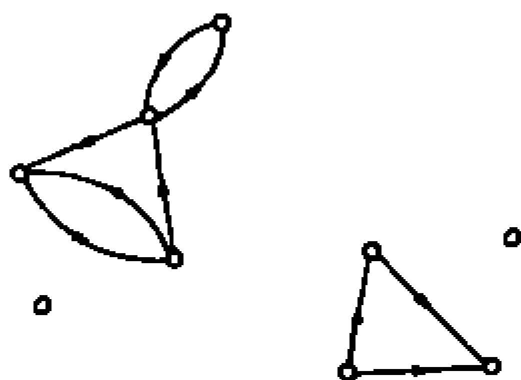
设u和v是有向图D的任意两个不同的顶点，如果D中存在从u到v的有向路，那么称可从u到达v；如果在D中既可从u到达v，也可从v到达u，则称顶点u和v是强连通的。强连通关系是有向图D的顶点集$V(D)$上的等价关系。设由强连通关系确定的等价类为：$V_1, V_2, \cdots, V_m$，那么D的导出有向子图$\langle V_1\rangle, \langle V_2\rangle, \cdots, \langle V_m\rangle$称为$D$的强连通分支（图 9.8 给出了一个有向图以及它的四个强连通分支）；如果$m = 1$，则称D是强连通的。显然有向图强连通的充要条件是D的任何两个顶点u和v是强连通的。

假设某公路网络连接若干城镇，且每条公路都是单向行驶的公路（如某条公路可双向行驶的，则可视为两条反向的单向行驶的公路）。设由公路网络对应的有向图为D，如果D是强连通的，则从任意一个城镇出发，按照规定行驶方向，可以驾车到达任何其它的城镇。显然，单向行驶的公路网应当是强连通的，否则这个公路网"实质上"是不连通的。一个自然的问题是：什么情况下才能对给定的公路网规定其单行方向使得从任何一个城镇出发，严格按照规定的单行方向行驶，可以到达任意的其它城镇？如果用图论的语言这个问题就可叙述为：设公路网对应的图为G，在什么情况下存在G的定向D使得有向图D是强连通的？

如果存在图G的一个定向能够产生一个强连通有向图，则称G是可强连



(a) 有向图 D



(b) D 的四个强连通分支

图 9.8 有向图和它的强连通分支

通定向的，或图G存在强连通定向。并非每个图都是可强连通定向的，例如：如果G有桥，则G就不存在强连通定向。定理 9.2 给出了图G存在强连通定向的充要条件。

定理 9.2 设G是连通图，则G存在强连通定向当且仅当G是无桥的。

证明 如果G中存在桥$e=uv$，那么无论把e的方向规定为(u,v)或者(v,u)，则G的定向D中不存在从v到$u((u,v)\in A(D))$或者从u到$v((v,u)\in A(D))$的有向路，所以，如果G包含桥，则G就不存在强连通定向。

设G是无桥的，故G的每条边都在G的某个圈上。任取G中的圈C，同时任意规定C的一个绕行方向，C中的每条边都按所规定的绕行方向来定向，定向后的C显然是强连通的。假设G_0是G的所有子图中存在强连通定向且边数最多的子图，记D_0为G_0的强连通定向。如果$G_0\cong G$，则G存在强连通定向，定理成立。

假设$G_0\ncong G$。因为G是连通图，所以存在$e=uv\in E(G)/E(G_0)$使得$u\in V(G_0)$。又因为e不是G的桥，所以存在G的圈C包含e。

如果$V(C)\cap V(G_0)=\{u\}$，则任意选择C的绕行方向，且对$E(C)$中的所有边按选定的绕行方向定向。由此得到G的子图$G_1=\langle E(G_0)\cup E(C)\rangle$以及$G_1$的定向$D_1$。对任意$x,y\in V(G_1)$，如果$x,y\in V(C)$或者$x,y\in V(G_0)$，则$x$和$y$是强连通的；如果$x\in V(C)$且$y\in V(G_0)$，则由$u$和$x$在定向后的$C$中是强连通的且$u$和$y$在$D_0$中也是强连通的，所以$x$和$y$在$D_1$中是强连通的，即$G_1$是$G$的存在强连通定向的子图，与$G_0$的取法矛盾。

如果$V(C)\cap V(G_0)\neq\{u\}$，则存在C中包含e且与$V(G_0)$内不交的u—x子路P使得$V(P)\cap V(G_0)=\{u,x\}$。对P按照从u到x的方向定向，由于D_0中存在x—u有向路，所以$\langle E(P)\cup E(G_0)\rangle$是$G$的存在强连通定向的子图，与$G_0$的取法矛盾。■

练习

1. 确定全部互不同构的(4,4)有向图。

2. 证明或否定，对每个整数 $p \geq 2$，存在 p 阶有向图 D 使得对 D 的任意不同的顶点 u 和 v，$\mathrm{od}(u) \neq \mathrm{id}(v)$。

3. 证明或否定：不存在包含奇出度顶点的个数为奇数或奇入度顶点的个数为奇数的有向图。

4. 设有向图 D 的顶点集 $V(D) = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$，则定义 D 的邻接矩阵 $A(D) = [a_{ij}]_{p\times p}$，其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & 若(v_i, v_j) \in A(D) \\ 0 & 其它。\end{cases}$$

(a) 有向图邻接矩阵的行和以及列和说明了什么？

(b) 说明矩阵是有向图的邻接矩阵的特征。

5. 设 D 是(p,q)有向图，证明：

(a) 如果 D 是连通的，则 $p-1 \leq q \leq p(p-1)$。

(b) 如果 D 是强连通的，则 $p \leq q \leq p(p-1)$。

6. 证明，对任何图 G 存在定向使得定向后的图中的每个有向圈的长不超过 $\Delta(G)$（提示：由 $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$）。

7. 设 D 是非平凡有向图，证明：D 是强连通的充分必要条件是对 $V(D)$ 的任何非空真子集 S，既有从 S 到 $\bar{S}$ 的弧，也有从 $\bar{S}$ 到 S 的弧。

9.2 有向树

有向树是基础图为树的定向图。如果有向树 T 中存在某个顶点 r 使得对 T 的每个顶点 v，T 中存在 r—v 有向路，则称 T 为有根树，且称 r 为 T 的根。因此如果 T 是根为 r 的有根树，则对任意 $v \in V(T)/\{r\}$，T 中不存在 v—r 有向路，故 $\mathrm{id}(r)=0$ 且 $\mathrm{id}(v)=1$。图 9.9 表示了有向无根树 T_1 和有向有根树 T_2（根为 r）。

通常在画有根树 T 时，把根放在顶端；与根邻接的 T 的顶点放在根的下一层；与这些顶点邻接的顶点放在又下一层，如此等等。这样图 9.9 中的有根树 T_2 重新被画成图 9.10(a)，事实上，由于弧的全部方向都向下，所以我们可省去全部箭头画成图 9.10(b)。另外，必须指出图 9.10(b) 代表有根树（一种有向树），而不是无向图中的树。

如果 T 是根为 r 的有根树且 v 是 T 的顶点，那么 v 的层数就是 T 中唯一

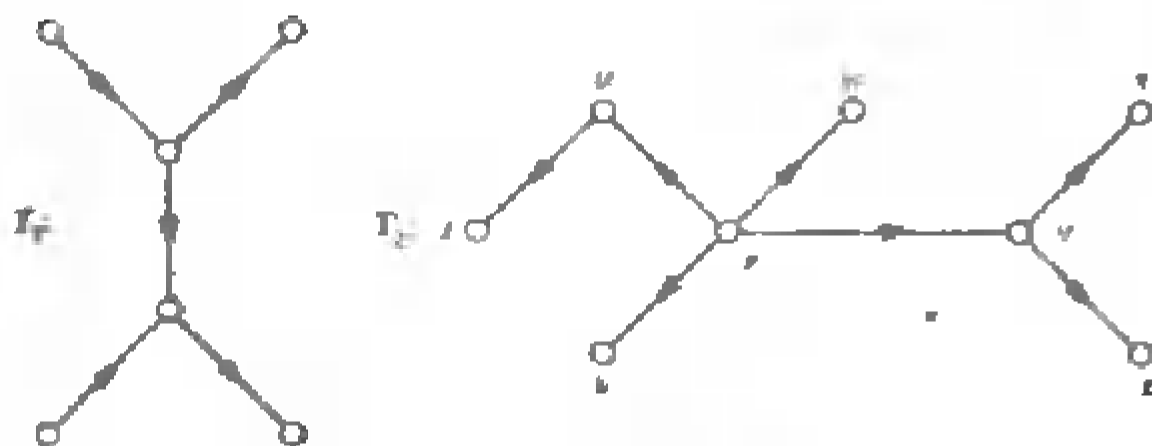


图 9.　有根树 T_1 和有向无根树 T_2

的有向 $r-v$ 路的长度. T 的顶点层数的最大值称为树 T 的高度，并用 $h(T)$ 表示. 对于图 9.10 中的有根树 T_1，根 r 在 0 层，顶点 u,v,w 和 y 在第一层，而顶点 t,x 和 z 在第二层，且 $h(T_1)=2$。

在研究有根树时，常常要使用某些相当形象性的术语，设 T 是根为 r 的有根树，对任何顶点 $v(v\neq r)$，v 的父亲就是邻接到 v 的唯一顶点 u，反过来 v 是 u 的儿子，具有同样父亲的两个顶点称为兄弟，在图 9.10 的有根树中，y 是 x 的父亲，而且，x 是 y 的儿子，且 x 和 z 是兄弟.

在有根树中，没有儿子的顶点（出度为 0）称为叶子，而其它顶点（有儿子的顶点）称为内部顶点. 图 9.10 中的有根树有 5 个叶子和 3 个内部顶点.

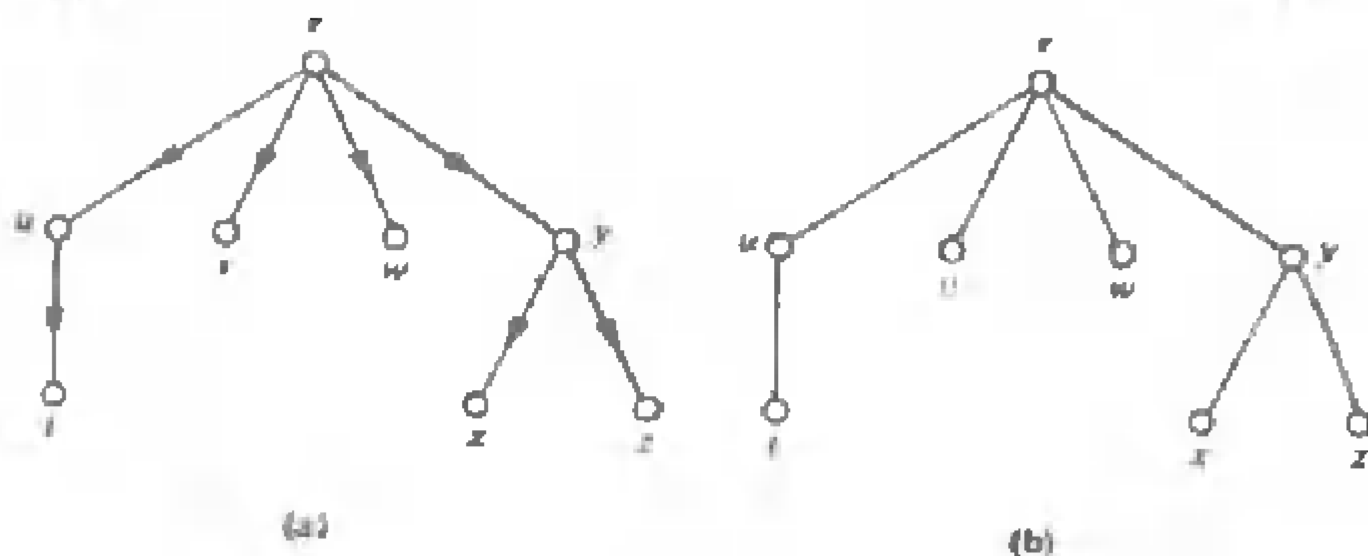


图 9.　有根树

在有根树的许多应用中，一般对顶点有多少儿子要进行限制. 如果有根树 T 的每个顶点至多有 n 个儿子且至少存在一个顶点有 n 个儿子，则称 T 为 n 叉树；如果有根树 T 的每个内部顶点都有 n 个儿子，则称 T 为完全 n 叉树. 如果有根树 T 的每个顶点的儿子是有序的（如第一个儿子，第二个儿子，等等），则称 T 是有序的或者 T 是有序树. 在有序树的画法中，规定儿子按照顺序从左到右排列.

在图9.11中有根树T_1是完全3-叉树，而T_2是3-叉树，不是完全3-叉树，有根树T_3和T_4是完全2-叉树。作为有序树它们是不相等的，因为T_3中w是t的第一个儿子，而在T_4中w是t的第二个儿子，作为无序树，它们应该看作是相等的。

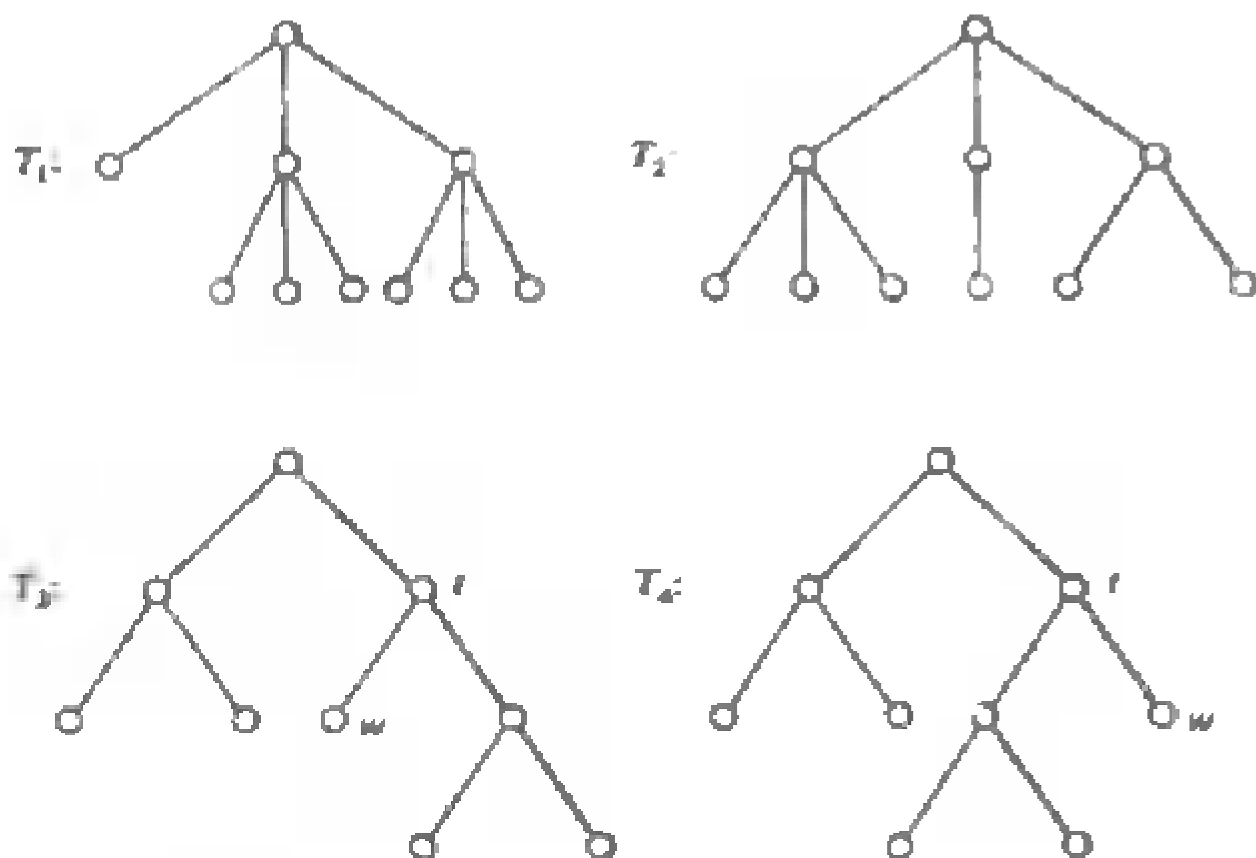


图 9.11 有序和无序 n-叉树

下面的结果给我们提供了涉及到完全n-叉树的阶和内部顶点个数的基本公式。

定理9.3 有m个内部顶点的完全n-叉树T的阶为$p=nm+1$。

证明 因为每个内部顶点有n个儿子且每个儿子只有一个父亲，故在T中恰好有nm个儿子。因为只有根不是儿子，从而$p=nm+1$。■

推论9.3 有m个内部顶点的完全2-叉树有$2m+1$个顶点，且有$m+1$个叶子。

证明 由定理9.3，T的阶为$2m+1$。因为T的每个顶点或者是内部顶点或者是叶子，所以T有$m+1$个叶子。■

现在我们给出2-叉树中阶和高之间的关系。

定理9.4 如果T是高为h的p阶2-叉树，则

$$h+1\leq p\leq 2^{h+1}-1.$$

证明 设$p_k(0\leq k\leq h)$是T中第k层的顶点个数，则$\sum_{k=0}^{h}p_k=p$。又因为$1\leq p_k\leq 2^k$，从而

$$h+1=\sum_{k=0}^{h}1\leq\sum_{k=0}^{h}p_k=p\leq\sum_{k=0}^{h}2^k=2^{h+1}-1,$$

导出了所需的结果。■

如果有根树 T 的高为 h 且每个叶子在 h 层或 $h-1$ 层，则称 T 是平衡的。

图 9.12 表示了两个完全 2- 叉树，第一个是平衡的，而第二个是不平衡的。下面我们给出定理 9.4 的一个简单推论。

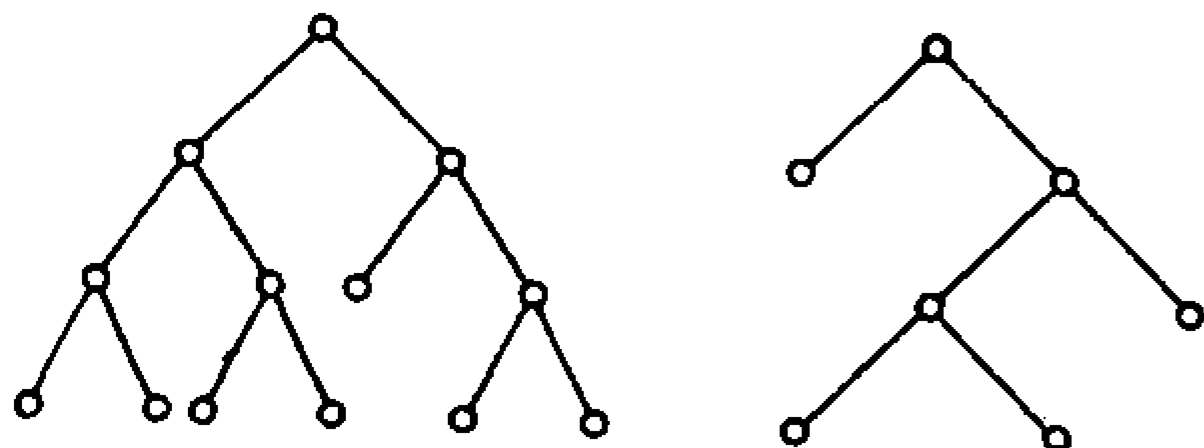


图 9.12 平衡和不平衡完全 2- 叉树

推论 9.4 如果 T 是 2- 叉树，高为 h 且阶为 p，那么

$$h\geq\left\lceil\log_2\left(\frac{p+1}{2}\right)\right\rceil,$$

如果 T 是平衡完全 2- 叉树，则

$$h=\left\lceil\log_2\left(\frac{p+1}{2}\right)\right\rceil。$$

证明 设 T 是高为 h 且阶为 p 的 2- 叉树，由定理 9.4，$p\leq 2^{h+1}-1$ 或 $2^h\geq(p+1)/2$，故 $h\geq\log_2[(p+1)/2]$，如果 T 是平衡完全 2- 叉树，故有 $p>2^h-1$，所以 $2^h-1<p\leq 2^{h+1}-1$，从而

$$2^{h-1}<\frac{p+1}{2}\leq 2^h,$$

所以，$h-1<\log_2[(p+1)/2]\leq h$，这意味着 $h=\lceil\log_2[(p+1)/2]\rceil$。■

2- 叉树的一个应用就是在几个选手或几组选手中，安排一个淘汰赛的比赛程序。例如，假设有 13 个选手争夺网球冠军，那么一个比赛程序就能用 13 个叶子的任何一个完全 2- 叉树来表示使得每位选手对应一个叶子。由推论 9.3，这个完全 2- 叉树有 12 个内部顶点和 25 阶。图 9.13 表示这样两个完全 2- 叉树 T_1 和 T_2。在每种情况下，根 c 代表冠军。当运用一个完全 2- 叉树来代表一个比赛程序时，我们通常的画法是把有根树的根放在底部。例如，我们要用这种方式画图 9.13 中的完全 2- 叉树 T_1，结果就如图 9.14 所示，标号表示选手 2 胜选手 1，选手 4 胜选手 5，如此等等，冠军就是选手 6 和 9 之间这场比赛的胜

利者。

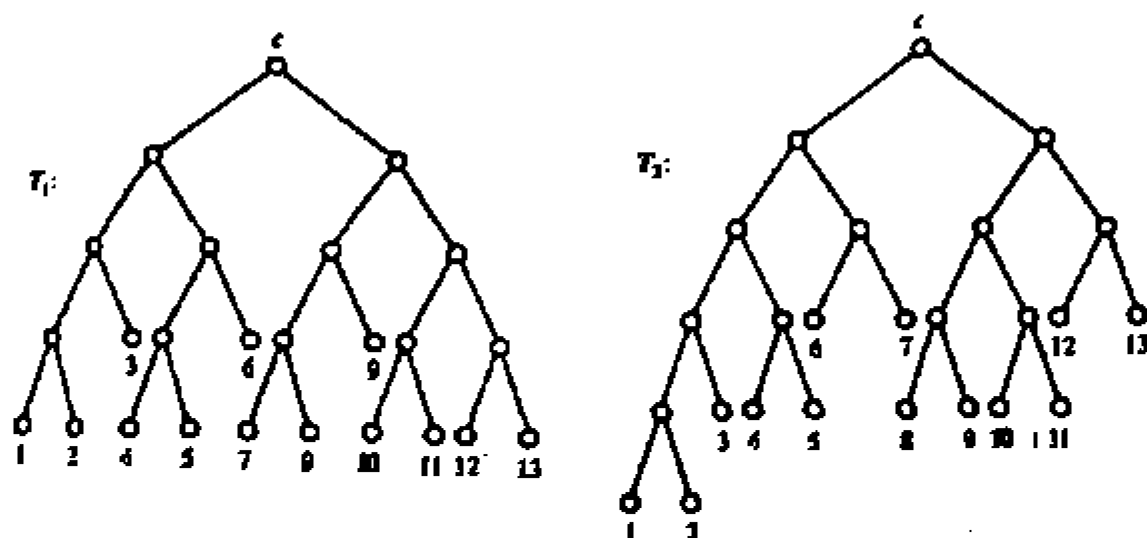


图 9.13　有 13 个叶子的两个完全 2-叉树

在图 9.13 的每个完全 2-叉树中，$p=25$，由推论 9.4，高 h 至少是 $\lceil \log_2 13 \rceil = 4$，所以 $h \geq 4$。完全 2-叉树 T_1 是平衡的，所以 $h=4$，这意味着每个选手为了争夺冠军必须赢 3 场或 4 场比赛。另一方面，T_2 是不平衡的，T_2 的高是 5，在这种情况下 1 号选手必须赢 5 场比赛才能成为冠军，而 12 号选手就只需赢 3 场比赛。人们在处理不平衡 2-叉树时，这种差异总会产生。如果某个选手需要赢得附加赛才能有资格成为主力队员或者上届冠军可以少参加几场比赛，则就可以用不平衡 2-叉树表示比赛程序。

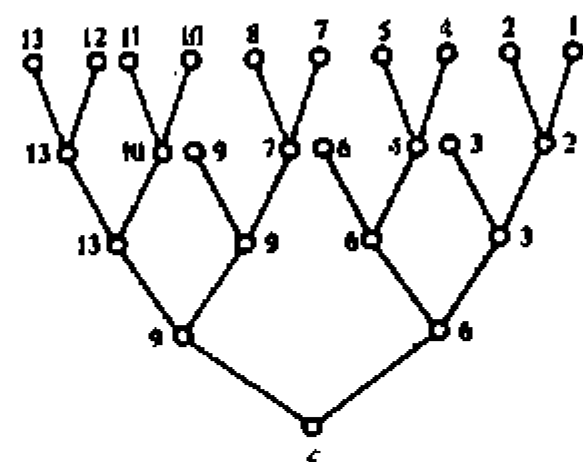


图 9.14　用完全 2-叉树表示比赛程序

完全 2-叉有序树又称为 2-分树。有序树要考虑顶点的位置，我们把这种要求叫做定位。例如 2-叉有序树的每个顶点可能在它下面的左边位置有一个儿子，或右边位置有一个儿子，或两个位置都有儿子，或都没有儿子。这四种情况就代表四种不同的有序树，这样的有序树就叫定位有序树。图 9.15 所示的是两个相同的有序树，但是它们是不同的定位有序树。

在 2-叉定位有序树中，每个顶点可由二进制数进行编码。编码方法如下：根不编码；第一层的顶点用 1 位二进制数编码使得在左边的儿子编码为 0，而在右边的儿子为 1；第 $k(k>1)$ 层的顶点用 k 位二进制数编码使得每个顶点的编码满足将它的父亲的编码放在前 $k-1$ 位，最后再根据它是父亲的左边的儿子还是右边的儿子，在第 k 位放 0 或者 1。例如，如果第二层有两个顶点且每个顶点都有儿子，则第三层上的顶点，从左到右依次编码为 000，001，010，011，100，101，110，111。图 9.16 给出了一个定位有序树的编码。根据编码的定

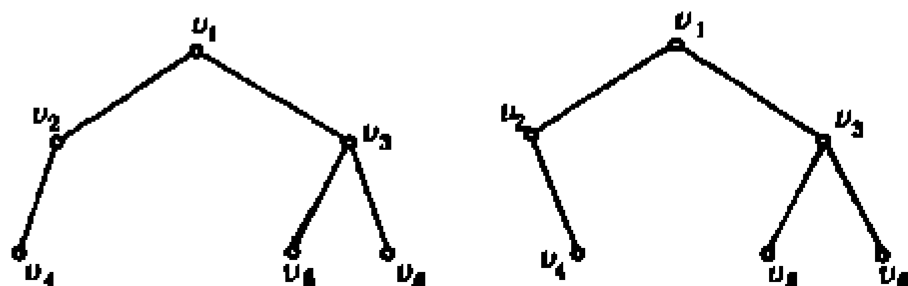


图 9.15 2-叉定位有序树

义可知，如果顶点 u 的编码 a 是顶点 v 的编码 b 从头开始的码段，则顶点 u 是顶点 v 的父亲或者是顶点 v 的父亲的 … 的父亲，同时也称 a 为 2-叉定位有序树的前缀码。事实上，在 2-叉定位有序树中除根以外，所有内部顶点的编码都是这个树的前缀码。不同的 2-叉定位有序树对应不同的前缀码，它在编码理论和程序理论中是很重要的工具。

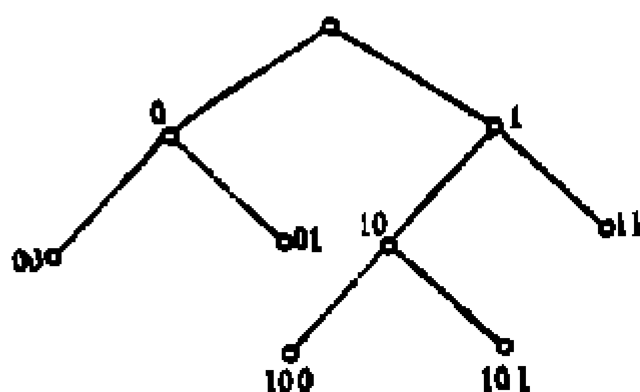


图 9.16

练习

1. 证明：如果有向树 T 中存在某个顶点 r 满足：$\mathrm{id}(r)=0$，但对 T 的其它顶点 $v(v\neq r)$，$\mathrm{id}(v)=1$，则 T 是根为 r 的有根树。

2. 说明定理 9.4 给出的结果是可达的。

3. 推广定理 9.4 的结果到 n-叉树。

4. 证明：任意 2-叉树必有奇数个顶点。

9.3 有向 Euler 图和有向 Hamilton 图

有向连通图 D 的有向 Euler 迹是包含 D 全部弧的一条有向开迹；D 的一条有向 Euler 回路是一条包含 D 的全部弧的有向回路，包含有向 Euler 回路的有向图称为有向 Euler 图。图 9.17 中有向图 D_1 是有向 Euler 图，而 D_2 包含一条有向 Euler 迹。

我们现在提出有向 Euler 图的一个特点，它的陈述和证明完全类似于定理 4.1。

定理 9.5 设 D 是非平凡连通有向图，那么 D 是有向 Euler 图当且仅当对

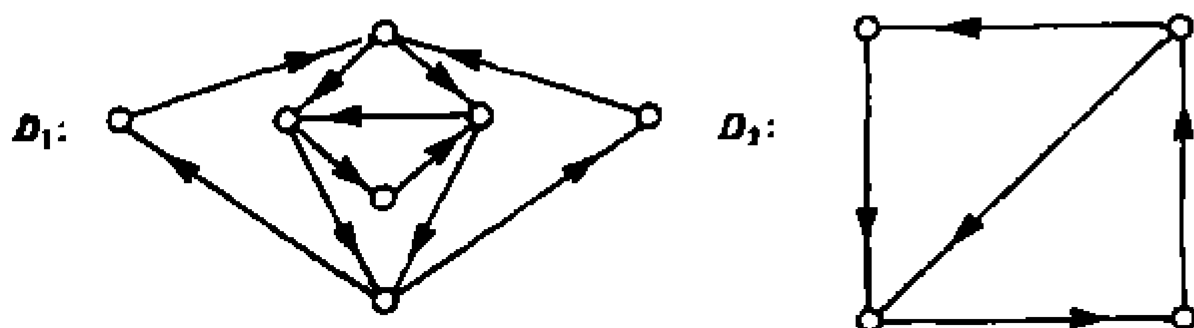


图 9.17 存在有向 Euler 回路和有向 Euler 迹的有向图

D 的任何顶点 v，$od(v) = id(v)$。

借助于定理 9.5 容易给出包含有向 Euler 迹的有向图的特点。

定理 9.6 设 D 是非平凡连通有向图，则 D 存在有向 Euler 迹当且仅当 D 包含两个顶点 u 和 v 使得：

$$od(u) = id(u) + 1 \text{ 且 } id(v) = od(v) + 1,$$

且对 D 的任何其它顶点 $w(w \neq u,v)$，$od(w) = id(w)$，而且 D 的有向 Euler 迹是从 u 到 v 的有向迹。

定理 9.6 也能作如下推论。

定理 9.7 设 D 是连通有向图且

$$\sum_{v \in V(D)} |od(v) - id(v)| = 2l,$$

其中 $l \geq 1$，则存在 $A(D)$ 的划分 $E_1, E_2, \cdots, E_l$ 使得对任意 $1 \leq i \leq l$，$\langle E_i \rangle$ 是一条有向迹。还有一个相应的有趣结果。

定理 9.8 设 D 是连通有向图，如果 D 中存在顶点 u 和 v 使得 $od(u) = id(u) + l$ 且 $id(v) = od(v) + l$，其中 l 是正整数，但是对 D 的其它顶点 $w(w \neq u,v)$，$od(w) = id(w)$，则 D 包含 l 条弧不交的 u—v 有向路。

很自然有向图中也有相应的有向 Hamilton 图的概念。有向图称为是有向 Hamilton 的或者是有向 Hamilton 图，如果它存在一个包含全部顶点的有向圈（即生成圈），而这个圈就称为有向图的有向 Hamilton 圈。就像与 Hamilton 图一样，没有刻划有向 Hamilton 图的特征，而且有向 Hamilton 图比 Hamilton 图更加复杂。关于一个有向图是有向 Hamilton 的充分条件也是存在的，这些充分条件类似于 Hamilton 图的较简单充分条件。自然每个有向 Hamilton 图都是强连通的。

我们不加证明地陈述下面由 Meynitl 给出的有向图是有向 Hamilton 图的充分条件，这个充分条件与 Ore 给出的 Hamilton 图充分条件是相平行的。

定理 9.9(Meynitl) 设 D 是 p 阶非平凡的强连通有向图，如果对每两个

不同的非邻接顶点 u,v

$$\deg(u)+\deg(v)\geq 2p-1,$$

则 D 是有向 Hamilton 的。

图 9.18 中的有向图是一个 4 阶强连通有向图，但它不是有向 Hamilton 的，且如果 u 和 v 是这个有向图的两个非邻接顶点，则 $\deg(u)+\deg(v)\geq 2p-2$。这个例子说明定理 9.9 给出的界是可达的。

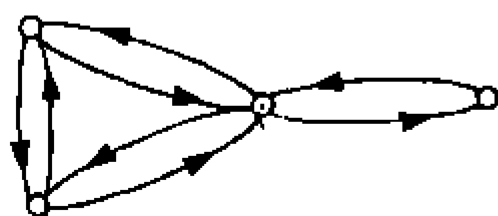


图 9.18 一个非有向 Hamilton 图

我们现在来讨论定理 9.9 的几个推论。

推论 9.9a(Woodall) 设 D 是 p 阶非平凡有向图，如果对 D 的任何不同顶点 u 和 v 满足由 $(u,v)\notin A(D)$ 可得

$$\mathrm{od}(u)+\mathrm{id}(v)\geq p, \tag{9.1}$$

则 D 是有向 Hamilton 的。

证明 首先证明条件(9.1)意味着 D 是强连通的。设 u 和 v 是 D 的任意两个顶点，我们证明 D 中存在一条从 u 到 v 的有向路。如果 $(u,v)\in A(D)$，那么这是显然的。如果 $(u,v)\notin A(D)$，则由(9.1)，至少存在 D 的一个顶点 w，$w\neq u,v$ 使 $(u,w),(w,v)\in A(D)$，从而 uwv 是 D 的一条 u—v 有向路。同理可得 D 中也存在一条 v—u 有向路，因此 D 是强连通的。

设 u 和 v 是 D 的任意两个不邻接顶点，则由(9.1)，$\mathrm{od}(u)+\mathrm{id}(v)\geq p$ 且 $\mathrm{id}(u)+\mathrm{od}(v)\geq p$，所以 $\deg(u)+\deg(v)\geq 2p$。因此根据定理 9.9，D 是有向 Hamilton 的。■

下面大家熟知的一个结果是由 Ghouila-Houri 给出的。它是定理 9.9 的直接推论。

推论 9.9b(Ghouila-Houri) 设 D 是强连通的有向图，且对 D 的每个顶点 v，$\deg(v)\geq p$，则 D 是有向 Hamilton 的。

这个结果又可导出另一个结论。

推论 9.9c 设 D 是有向图，如果对 D 的每个顶点 v，有

$$\mathrm{od}(v)\geq \frac{p}{2} \text{ 且 } \mathrm{id}(v)\geq \frac{p}{2},$$

则 D 是有向 Hamilton 的。

有向图 D 中的一条生成有向路称为 D 的有向 Hamilton 路。借助于定理 9.9，我们能够提出有向图包含有向 Hamilton 路的条件。

推论 9.9d 设 D 是 p 阶有向图，且对 D 的任意两个不同的非邻接顶点 u，v 有

$$\deg(u)+\deg(v)\geq 2p-3, \tag{9.2}$$

则 D 包含一条有向 Hamilton 路。

证明 我们向 D 中加入顶点 $w(w\notin V(D))$ 并把 w 以二种不同的方向连接到 D 的每个顶点，由此构成一个新有向图 D'。显然有向图 D' 是强连通的。设 u 和 v 是 D' 的非邻接顶点，那么 u 和 v 是 D 的非邻接顶点，由(9.2)可得

$$\begin{aligned}\deg_{D'}(u)+\deg_{D'}(v)&=\deg_D(u)+\deg_D(v)+4\\&\geq(2p-3)+4=2p+1=2(p+1)-1.\end{aligned}$$

因为 D' 是 $p+1$ 阶的强连通有向图，故由定理 9.9，D' 包含一个有向 Hamilton 圈 C。删去 w 和在 C 上与它关联的弧就产生 D 的一条有向 Hamilton 路。■

下列有向图存在有向 Hamilton 路的充分条件类似于上述三个推论，分别是：

推论 9.9e 设 D 是 p 阶有向图，如果对 D 的任意两个顶点 u 和 v，由 $(u,v)\notin A(D)$ 可得

$$\mathrm{od}(u)+\mathrm{id}(v)\geq p-1,$$

则 D 包含有向 Hamilton 路。

推论 9.9f 如果 D 是 p 阶有向图且对 D 的每个顶点 v，$\deg(v)\geq p-1$，则 D 包含有向 Hamilton 路。

推论 9.9g 如果 D 是 p 阶有向图且对 D 的每个顶点 v，$\mathrm{od}(v)\geq(p-1)/2$ 且 $\mathrm{id}(v)\geq(p-1)/2$，那么 D 包含有向 Hamilton 路。

练习

1. 举例说明在定理 9.9 的陈述中有向图 D 是强连通的条件不能去掉。

2. 举例说明在推论 9.9b 中有向图是强连通条件不能去掉。

3. (a) 通过给出一个满足定理 9.9 条件但不满足推论 9.9a 的条件的有向 Hamilton 图例子，说明推论 9.9a 的条件比定理 9.9 的条件强。

(b) 通过给出一个满足定理 9.9 条件但不满足推论 9.9b 的条件的有向 Hamilton 图例子，说明推论 9.9b 的条件比定理 9.9 的条件强。

4. 证明：推论 9.9b。

5. 证明：推论 9.9a 和推论 9.9b 彼此都不是另一个的推论。

6. 证明：推论 9.9e 和推论 9.9f。

7. 证明：推论 9.9a 中提出的界是最好的。

9.4 竞赛图

回想定向图 D 能够通过对某个图 G 的所有边确定一个方向得到，而有向图 D 也称为 G 的定向。最受人注意的定向图类是竞赛图类，即通过定向完全图的边得到的有向图。

不同构竞赛图的个数随着阶的增长迅速增长。例如，只有一个阶为 1 和阶为 2 的竞赛图，有两个 3 阶竞赛图 T_1 和 T_2（如图 9.19 所示）。有四个 4 阶竞赛图，5 阶的有十二个，而 10 阶的则超过九百万个。



图 9.19　3 阶竞赛图

如果 T 是 p 阶竞赛图，则因为 T 的基础图是完全图，它的大小为 $\binom{p}{2}$，且

$$\sum_{v\in V(T)} \mathrm{od}(v) = \sum_{v\in V(T)} \mathrm{id}(v) = \binom{p}{2}。$$

设 T 是竞赛图，如果对任意 (u,v)，$(v,w) \in A(T)$，$(u,w) \in A(T)$，则称 T 是传递的。图 9.19 中的竞赛图 T_2 是传递的，而 T_1 则不是。下面的结果给出了传递竞赛图的基本性质。

定理 9.10　竞赛图是传递的当且仅当它是无圈的。

证明　设 T 是无圈竞赛图。对任意 (u,v)，$(v,w) \in A(T)$，因为 T 是无圈的，所以 $(w,u) \notin A(T)$，故 $(u,w) \in A(T)$，从而 T 是传递的。

反过来，假设 T 是传递竞赛图，并假设 T 包含有向圈 $C = v_1v_2\cdots v_nv_1$。因为对 T 的任意两个不同的顶点 u 和 v，$A(T)$ 恰好包含 (u,v) 和 (v,u) 中的一条弧，所以 $n \geq 3$。又因为 (v_1,v_2)，$(v_2,v_3) \in A(T)$ 且 T 是传递竞赛图，所以 $(v_1,v_3) \in A(T)$，类似地 (v_1,v_4)，(v_1,v_5)，…，(v_1,v_n) 也是 T 的弧。这与 (v_n,v_1) 是 T 的弧矛盾，因此 T 是无圈的。■

每个 p 阶竞赛图都能用来模拟有 p 个参赛队的一场循环赛。在一场循环赛中，每个队都要安排和其它队恰好比赛一次且假设不能出现平局。设 v_1，v_2，…，v_p 代表参赛队，同时也代表相应竞赛图 T 的顶点，如果在 v_i 和 v_j 之间的比赛中，v_i 队胜 v_j 队，则 (v_i,v_j) 是 T 的一条弧。因此队 v_i 胜的场数就等于 $\mathrm{od}(v_i)$，从而在竞赛图中顶点 v_i 的出度也可看作 v_i 的得分。

如果存在 p 阶竞赛图 T，顶点标号为 $v_1,v_2,\cdots,v_p$ 使对任意 $1\le i\le p$，$od(v_i)=s_i$，那么非负整数序列 $s_1,s_2,\cdots,s_p$ 称为竞赛图的得分序列。

下面的结果恰好给出一个非负整数序列是某个传递竞赛图的得分序列的充分必要条件。

定理 9.11 包含 $p(p\ge1)$ 个非负整数的不减序列 ϕ 是某个 p 阶传递竞赛图的得分序列当且仅当 ϕ 是序列 $0,1,2,\cdots,p-1$。

证明 设 T 是 p 阶传递竞赛图，我们证明：$0,1,\cdots,p-1$ 是 T 的唯一的得分序列。由于 T 的基础图为完全图，所以只要证明 T 中不存在两个顶点有同样的得分，设 $u,v\in V(T)$，并且假设 $(u,v)\in A(T)$。如果 W 表示从 v 邻接的顶点子集，那么 $od(v)=|W|$，因为对任意 $w\in W$，$(v,w)\in A(T)$ 且 $(u,v)\in A(T)$，由 T 是传递的，故对任意 $w\in W$，$(u,w)\in A(T)$，因此 $od(u)\ge1+|W|=1+od(v)$。■

推论 9.11a 包含 $p(p\ge1)$ 个非负整数的不减序列是传递竞赛图的顶点的入度序列当且仅当 ϕ 是序列 $0,1,\cdots,p-1$。

由定理 9.11 很容易得到另一个结果。

推论 9.11b 对于每个正整数 p，存在唯一的 p 阶传递竞赛图。

由此结合定理 9.10 还可以得到另一个结果。

推论 9.11c 对于每个正整数 p，恰好存在一个无圈的 p 阶竞赛图。

虽然对任意的正整数 p，恰好存在唯一的 p 阶传递竞赛图，但是 $p(p\ge3)$ 阶竞赛图的个数不是唯一的。另一方面，每个竞赛图有一个传递竞赛图的结构。由于相互到达关系是竞赛图 T 的顶点集 $V(T)$ 上的等价关系，所以由相互到达关系将 $V(G)$ 划分为等价类 $V_1,V_2,\cdots,V_n(n\ge1)$。对任意 $1\le i\le n$，记 $S_i=\langle V_i\rangle$，那么 $S_i(1\le i\le n)$ 是 T 的强连通分支。

设 T 是有强连通分支 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 的竞赛图。对任意 $1\le i\ne j\le n$，如果存在 $u\in V(S_i)$，$v\in V(S_j)$ 使得 $(u,v)\in A(T)$，则由于 S_i 和 S_j 是强连通有向图，从而对任意 $w\in V(S_j)$ 以及任意 $x\in V(S_i)$，$(w,x)\notin A(T)$ 且 $(x,w)\in A(T)$，因此可定义有向图 $\hat{T}$ 使得：顶点 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 与 T 的强连通分支一一对应（u_i 对应于 S_i，$i=1,2,\cdots,n$），且对任意 $1\le i\ne j\le n$ $(u_i,u_j)\in A(\hat{T})$ 当且仅当存在 S_i 的某个顶点至少邻接到 S_j 的一个顶点。图 9.20 表示了竞赛图 T 和相应的有向图 $\hat{T}$。

显然对图 9.20 中竞赛图 T，$\hat{T}$ 也是竞赛图，且事实上是传递竞赛图。由定理 9.12 说明对任何竞赛图这都是正确的（见本节练习 4）。

定理 9.12 如果 T 是恰有 n 个强连通分支的竞赛图，则 $\hat{T}$ 是阶 n 的传递

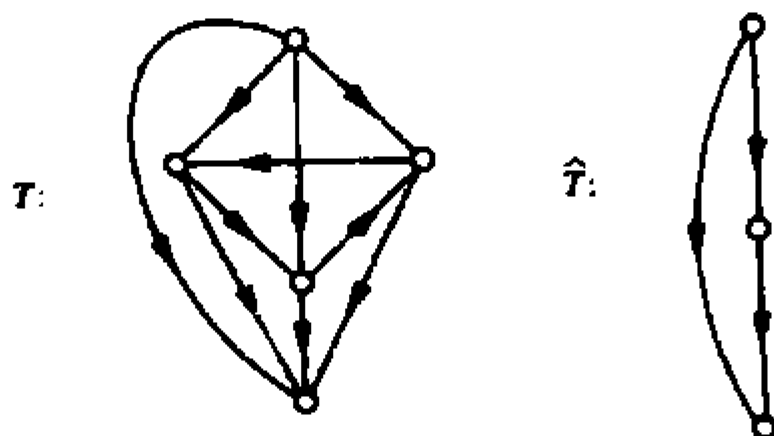


图 9.20 一个竞赛图 T 和 $\hat{T}$

竞赛图。

因为对每个竞赛图 T，我们有 $\hat{T}$ 是传递竞赛图。容易证明如果 T 是竞赛图，但不是强连通的，那么 $V(T)$ 能划分成 $V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n (n \geq 2)$ 使得对任意 $1 \leq i \leq n$，$\langle V_i \rangle$ 是强连通竞赛图，且存在 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 的一种编号方式使得对任意 $i > j$，如果 $v_i \in V_i, v_j \in V_j$，则 $(v_i, v_j) \in A(T)$。在研究不是强连通的竞赛图的性质时，这种分解是很有用的。

如果 u 和 v 是有向图 D 的两个顶点，且 D 至少包含一条 u—v 有向路，那么一条最短 u—v 有向路的长度称为从 u 到 v 的距离，并用 $d_D(u,v)$ 来表示或表示为 $d(u,v)$。下面的三个结果涉及到竞赛图的距离。

定理 9.13 设 v 是非平凡竞赛图 T 中得分最多的顶点，如果 u 是不同于 v 的顶点，则 $d(v,u) \leq 2$。

证明 假设 $\mathrm{od}(v) = n$，当然，$n \geq 1$。设从 v 邻接的顶点为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，那么对任意 $1 \leq i \leq n$，$d(v, v_i) = 1$。如果 $V(T) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，则证明已经完成。

假设 $V(T)/\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \neq \varnothing$，且 $u \in V(T)/\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$。如果存在 $1 \leq i \leq n$ 使得 u 是从 v_i 邻接的，那么 $d(u,v) = 2$，产生所需结果。假设不是这种情况，则 u 邻接到所有顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 和顶点 v，从而 $\mathrm{od}(u) \geq 1 + n = 1 + \mathrm{od}(v)$，不过这与 v 是得分最多的顶点矛盾。■

定理 9.13 首先由社会学家 Landau 在研究社会中从属关系的指挥或支配关系时发现。以孩子之间的指挥关系为例，这个定理说明：如果孩子 c 能够指挥的其他孩子的个数最多，那么对于每个其他孩子 d，或者 c 能够直接指挥 d 或者 c 能够指挥某个可以直接指挥 d 的孩子。因此 c，最多通过一次中间的孩子，就能指挥其他的所有孩子。

竞赛图的大量弧能够产生各种有向路和有向圈，Redei 首先发现竞赛图的这样一个性质。

定理 9.14(Redei) 每个竞赛图包含一条有向 Hamilton 路。

证明 设 T 是 p 阶竞赛图,并设 $P = v_1v_2\cdots v_k$ 是 T 中一条最长的有向路。如果 P 不是 T 的有向 Hamilton 路,那么 $1 \leq k < p$ 且至少存在一个不在 P 上的顶点 v。因为 P 是最长的有向路,所以 (v,v_1),$(v_k,v) \notin A(T)$,从而 (v_1,v),$(v,v_k) \in A(T)$。这意味着存在整数 $i(1 \leq i \leq k-1)$ 使得 $(v_i,v) \in A(T)$ 且 $(v,v_{i+1}) \in A(T)$,从而 $v_1v_2\cdots v_ivv_{i+1}\cdots v_k$ 是一条长度超过 P 的有向路,产生矛盾。■

定理 9.14 的一个简单而有用的结果与传递竞赛图有关。

推论 9.14 每个传递竞赛图恰好包含一条有向 Hamilton 路。

并非每个竞赛图都是有向 Hamilton 的,只是对于强连通竞赛图是这样一种情况。如果竞赛图是有向 Hamilton 的,则它必须具有更强的性质。设 D 是 $p(p \geq 3)$ 阶有向图,如果对任意 $3 \leq l \leq p$,D 的每个顶点都落在长为 l 的圈上,则称有向图 D 是点 - 全循环的。

定理 9.15(Moon) 每个非平凡强连通竞赛图是点 - 全循环的。

证明 设 T 是 $p(p \geq 3)$ 阶强连通竞赛图,并设 v_1 是 T 的任意顶点。我们证明对任意 $3 \leq l \leq p$,v_1 落在一个 l- 圈上。下面对 l 进行归纳证明。

因为 T 是强连通的,故有本节练习 8 得到 v_1 落在一个 3- 圈上。假设 v_1 落在一个 l- 圈 $v_1v_2\cdots v_lv_1$ 上,其中 $3 \leq l \leq p-1$。我们证明 v_1 也落在一个$(l+1)$- 圈上。

情况 1 存在顶点 $v \in V(T)\backslash V(C)$ 使得顶点 v 至少邻接到 C 的某个顶点,且至少从 C 的某个顶点邻接。这意味着存在 $1 \leq i \leq l$ 使得(v_i,v) 和(v, v_{i+1}) 是 T 的两条弧(下标按模 l 加法运算)。因此 v_1 落在$(l+1)$- 圈 $v_1v_2\cdots v_ivv_{i+1}\cdots v_lv_1$ 上。

情况 2 对任意顶点 $v \in V(T)\backslash V(C)$,顶点 v 邻接到 $V(C)$ 的每个顶点或者从 $V(C)$ 的每个顶点邻接。设 A 表示邻接到 C 的每个顶点且不属于 $V(C)$ 的全部顶点组成的集,并设 B 是从 C 的每个顶点邻接且不属于 $V(C)$ 的全部顶点组成的集。故 $A \cup B = V(T)\backslash V(C)$。因为 T 是强连通的,A 和 B 都不是空集,所以存在 B 的一个顶点 b 和 A 的一个顶点 a 使得 $(b,a) \in A(T)$,因此,v_1 落在$(l+1)$- 圈 $av_1v_2\cdots v_{l-1}ba$ 上。■

推论 9.15(Camion) $p(p \geq 3)$ 阶竞赛图是有向 Homilton 的当且仅当它是强连通的。

练习

1. 画出全部四个(不同的)4 阶竞赛图。

2. (a) 证明:每个竞赛图最多有一个得零分的顶点。

(b) 证明:每个竞赛图最多有一个入度为零的顶点。

3. (a) 证明:推论 9.11a。

(b) 证明:推论 9.11b。

4. 证明:定理 9.12。

5. 确定存在 p 阶正则竞赛图的所有 p 的可能值。

6. 证明:每个正则竞赛图是强连通的。

7. 证明:在非平凡正则竞赛图中,任意两个顶点落在一个 3- 圈上。

8. 证明:非平凡强连通竞赛图的每个顶点落在一个 3- 圈上。

9. 证明:如果竞赛图 T 不是传递竞赛图,那么 T 至少有三条有向 Hamilton 路。

10. 证明:推论 9.15。

11. 证明或者否定:非平凡强连通竞赛图 T 的每条弧落在 T 的一个有向 Hamilton 圈上。

12. 证明:如果竞赛图 T 有一个 l- 圈,那么对任意 $3 \leq s \leq l$,T 有一个 s- 圈。

10 网络流

现代社会可以说在很大程度上是通过各种网络来管理与控制的，因此对网络从数学上进行分析是一项十分重要的课题。网络除了有广泛的实际应用外，在理论上也有重大意义。有些较难处理的理论问题，用网络来研究十分简洁、清晰。本书的最后两章我们将系统地介绍网络的数学理论。

10.1 网络的基本概念

网络 N 是指具有以下结构的有向图 D：

(1) D 中有两个称为 N 的源和汇的不同顶点 u 和 v；

(2) 在 D 的弧集 $A(D)$ 上定义了非负整数值函数 c。

因此网络 N 是规定了源和汇且每条弧上都给定了非负整数权的赋权有向图。有向图 D 称为网络 N 的基础有向图，有向图 D 中不是源和汇的顶点称为中间顶点，函数 c 称为网络 N 的容量函数，在弧 $a=(x,y)$ 上的值称为弧 a 的容量，记为 $c(a)$ 或者 $c(x,y)$。我们用 $N=(D,u,v,c)$ 表示基础有向图为 D，源为 u，汇为 v 且容量为 c 的网络。

实际上，弧 (x,y) 上的容量可以看作某种物质在单位时间内允许通过弧 (x,y) 的最大数量，例如：弧 (x,y) 的容量可以看作某个航空公司从城市 x 到城市 y 直飞航班上座位的总数，也可看作在自来水厂的输水网络中，从 x 点到 y 点的一条管道的最大流量，或者看作沿着从城镇 x 到城镇 y 的一条公路，单位时间内允许通过的各种机动车辆的最大数量，故一般说来，网络流问题就是在不超过弧的容量的情况下，使得从源 u 到汇 v 的“流”最大。

网络可以用它的基础有向图 D 以及在 D 的弧上标明的容量来表示，例如：在图 10.1 的网络中，$c(x,y)=4$。为了以后叙述方便，特做如下约定：定义在弧集 $A(D)$ 上的函数 g 在弧 $a=(x,y)$ 上的值既可以用 $g(a)$ 表示，也可以用 $g(x,y)$ 表示；有向图 D 的顶点集 $V(D)$ 和弧集 $A(D)$，在不产生混淆的情况下，分别简记为 V 和 A，也可直接用 $D=(V,A)$ 表示顶点集和弧集分别为 V 和 A 的有向图。

如果 x 是有向图 D 的顶点，$N^+(x)$ 和 $N^-(x)$ 分别表示从 x 邻接的顶点子集和邻接到 x 的顶点子集，即 $N^+(x)=\{y\in V\mid(x,y)\in A\}$ 和 $N^-(x)=\{y\in V\mid(y,x)\in A\}$。网络 N 的流是定义在弧集 A 上的整数值函数满足：对任意 $a\in A$，

$$0\leq f(a)\leq c(a) \quad (10.1)$$

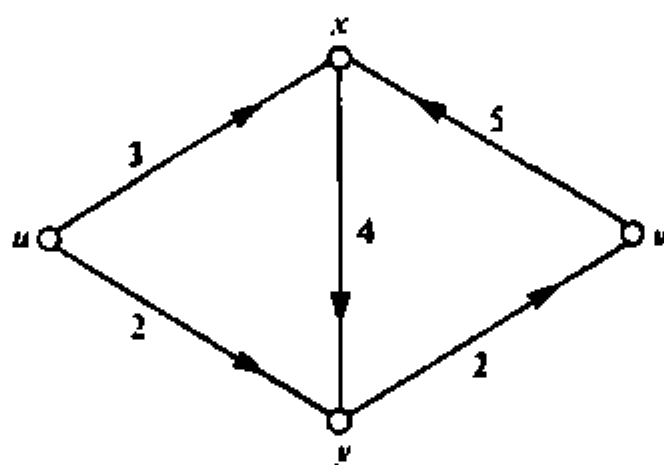


图 10.1 一个网络

且对每个 $x\in V\backslash\{u,v\}$，

$$\sum_{y\in N^+(x)} f(x,y)=\sum_{y\in N^-(x)} f(y,x)。\quad (10.2)$$

顶点 x 的净流出定义为 $\sum_{y\in N^+(x)} f(x,y)-\sum_{y\in N^-(x)} f(y,x)$，而 x 的净流入当然是 $\sum_{y\in N^-(x)} f(y,x)-\sum_{y\in N^+(x)} f(x,y)$。根据条件(10.2)，如果 x 是中间顶点，那么 x 的净流出等于 x 的净流入且它们的共同值等于零。

在弧 $a=(x,y)$ 上，流 f 在弧 a 上的值称为 a 的流值，表示在流 f 下沿弧 (x,y) 通过的物质总量。根据条件(10.1)，实际通过弧 (x,y) 的物质总量不能超过该弧的容量，所以条件(10.1)就称为相容条件。又因为条件(10.2)说明对任意中间顶点 x，流入 x 的物质总量等于流出的总量，所以条件(10.2)也称为守恒条件。

图 10.2 给出了网络流的例子，其中标在弧上的第一个数是该弧的容量，而第二个数是该弧的流值。设 f 为网络 N 上的流且 (x,y) 为 N 的弧，如果 $f(x,y)=c(x,y)$，即弧 (x,y) 的流值已经达到它的容量，则称弧 (x,y) 在流 f 下是饱和的，否则称弧 (x,y) 是不饱和的。我们注意到在图 10.2 所示的例子中，源 u 的净流出等于汇 v 的净流入，定理 10.1 证明了这个结果总是正确的。

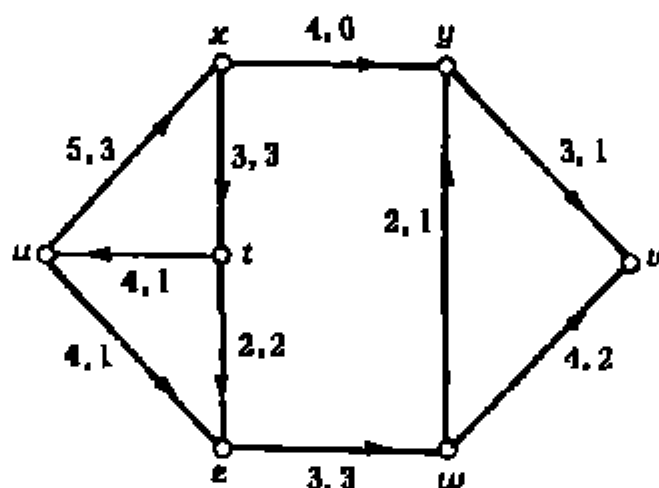


图 10.2 网络的流

在给出网络的第一个结果以前，还需要引入一些新的记法和概念。设 D 是有向图，X 和 Y 是顶点集 V 的子集，符号 (X,Y) 表示弧集 A 的如下子集：

$$(X,Y)=\{(x,y)\in A\mid x\in X,y\in Y\}.$$

如果 $X=\{x\}$ 为仅包含一个元素的集，我们通常记作 (x,Y) 而不是 $(\{x\},Y)$，

类似(X,y)表示$(X,\{y\})$。另外，我们对定义在弧集A上的函数进行如下推广：设g是定义在弧集A上的任意函数且X和Y是顶点集V的子集，则$g(X,Y)$定义为

$$g(X,Y)=\begin{cases}0 & (X,Y)=\varnothing \\ \sum\limits_{(x,y)\in(X,Y)} g(x,y) & \text{其它。}\end{cases}$$

根据$g(X,Y)$的定义，如果X,Y和Z是顶点集V的子集，则

$$g(X\cup Z,Y)=g(X,Y)+g(Z,Y)-g(X\cap Z,Y);$$

且对任意顶点$x\in V$及V的任意子集X，

$$g(x,V)=\sum_{y\in N^+(x)} g(x,y),\ g(V,x)=\sum_{y\in N^-(x)} g(y,x),$$

$$g(X,V)=\sum_{x\in X} g(x,V) \text{ 且 } g(V,X)=\sum_{x\in X} g(V,x).$$

对于定义在弧集A上的函数g的这种推广，以后不加说明的应用到其它定义在弧集A上的函数，例如：流f和容量c等。

定理 10.1 设网络$N=(D,u,v,c)$且f是N的流，则

$$f(u,V)-f(V,u)=f(V,v)-f(v,V).$$

证明 我们首先注意到

$$\sum_{x\in V} f(x,V)=\sum_{x\in V}(f(V,x). \tag{10.3}$$

因为等式(10.3)的两边都等于$f(V,V)$，且由(10.2)，如果$x\neq u,v$，则$f(x,V)=f(V,x)$。因此(10.3)变成

$$f(u,V)+f(v,V)=f(V,u)+f(V,v).\ ■$$

设f为网络N的流，则网络N的源u的净流出称为流f的值，用$\text{val}(f)$表示，事实上，由定理10.1可知，$\text{val}(f)$等价于网络N的汇v的净流入，如果网络N的流f满足对N的任意流f'都有$\text{val}(f)\geq \text{val}(f')$，则称$f$为网络$N$的最大流。下一节我们将给出最大流的特征且给出网络的最大流的算法。

设网络$N=(D,u,v,c)$，如果X为D的顶点子集使得$u\in X$且$v\notin X$，则D的弧子集$(X,V\backslash X)$称为网络N的割，我们通常把$V\backslash X$记为$\overline{X}$。如果$K=(X,\overline{X})$是N的割，那么K的容量定义为$c(X,\overline{X})$，记作$\text{cap}(K)$。在图10.2描述的网络中，如果取$X=\{u,x\}$，则由X产生的割$K=(\{u,x\},\overline{\{u,x\}})=\{(x,y),(x,t),(u,z)\}$且割$K$的容量是$\text{cap}(K)=c(x,y)+c(x,t)+c(u,z)=4+3+4=11$。

如果K是网络N的割，那么任何u—v有向路至少包含K中的一条弧，换句话说，如果将K中的所有弧从基础有向图D中删去，就不可能有u—v有向

路，所以，从这种意义上说，K"分离"u 和 v。直观上可看出网络 N 的流值不能超过割 K 的容量，这正是我们在定理 10.2 中要证明的。

定理 10.2 设 f 是网络 N 的流，并且 $K=(X,\overline{X})$ 是 N 的割，则

$$\mathrm{val}(f)=f(X,\overline{X})-f(\overline{X},X)\leq \mathrm{cap}(K)。$$

证明 设网络 $N=(D,u,v,c)$ 且 $K=(X,\overline{X})$ 是 N 的割。因为 f 是网络 N 的流，所以流 f 满足方程：

$$f(x,V)-f(V,x)=0\quad \forall\, x\in V\backslash\{u,v\},$$
$$f(u,V)-f(V,u)=\mathrm{val}(f)。$$

因为 $u\in X$ 且 $v\notin X$，故

$$\sum_{x\in X}\{f(x,V)-f(V,x)\}=\mathrm{val}(f),$$

不过

$$\sum_{x\in X}\{f(x,V)-f(V,x)\}=\sum_{x\in X}f(x,V)-\sum_{x\in X}f(V,x)$$
$$=f(X,V)-f(V,X),$$

且

$$f(X,V)=f(X,X\cup\overline{X})=f(X,X)+f(X,\overline{X})-f(X,X\cap\overline{X}),$$
$$f(V,X)=f(X\cup\overline{X},X)=f(X,X)+f(\overline{X},X)-f(X\cap\overline{X},X)。$$

因为 $X\cap\overline{X}=\varnothing$，所以 $f(X,X\cap\overline{X})=f(X\cap\overline{X},X)=0$，故

$$\sum_{x\in X}\{f(x,V)-f(V,x)\}=f(X,\overline{X})-f(\overline{X},X),$$

从而 $\mathrm{val}(f)=f(X,\overline{X})-f(\overline{X},X)$。又因为 $f(\overline{X},X)\geq 0$，所以 $f(X,\overline{X})-f(\overline{X},X)\leq \mathrm{cap}(K)$。■

设 K 为网络 N 的割，如果对 N 的每个割 K'，$\mathrm{cap}(K)\leq\mathrm{cap}(K')$，则称割 K 为网络 N 的最小割。

推论 10.2a 设 f 是网络 N 的流且 K 是网络 N 的割，如果 $\mathrm{val}(f)=\mathrm{cap}(K)$，则 f 是最大流，且 K 是最小割。

证明 由定理 10.2，如果 f^* 是 N 的最大流，且 K^* 是最小割，那么 $\mathrm{val}(f^*)\leq\mathrm{cap}(K^*)$，由最大流和最小割的定义可得，$\mathrm{val}(f)\leq\mathrm{val}(f^*)$ 且 $\mathrm{cap}(K^*)\leq\mathrm{cap}(K)$，从而

$$\mathrm{val}(f)\leq\mathrm{val}(f^*)\leq\mathrm{cap}(K^*)\leq\mathrm{cap}(K)。$$

因为 $\mathrm{val}(f)=\mathrm{cap}(K)$，故 $\mathrm{val}(f)=\mathrm{val}(f^*)$ 且 $\mathrm{cap}(K^*)=\mathrm{cap}(K)$，所以 f 是最大流且 K 是最小割。■

推论 10.2b 如果 f 是网络 $N=(D,u,v,c)$ 的流，且 $(X,\overline{X})$ 是 N 的割使得

$$f(a)=\begin{cases}c(a) & \forall\, a\in(X,\overline{X})\\ 0 & \forall\, a\in(\overline{X},X).\end{cases}$$

那么 f 是 N 的最大流且 $(X,\overline{X})$ 是最小割。

考虑图 10.3 所示的源为 u 和汇为 v 的网络 N，正像以前一样，这里标记在弧 a 上的第一个数是它的容量 $c(a)$，而第二个数是 a 的流值 $f(a)$。我们看到 $\mathrm{val}(f)=4$，如果 X 是集 $\{u,x,y\}$，那么 $(X,\overline{X})$ 是 N 的割且 $c(X,\overline{X})=4$，由推论 10.2a，f 是最大流且 $(X,\overline{X})$ 是最小割。

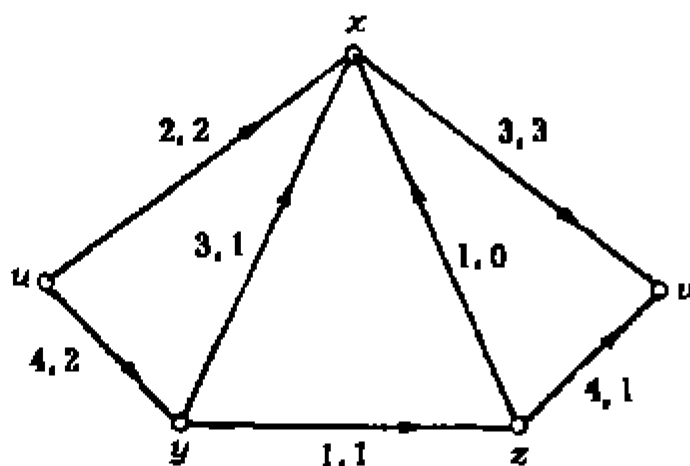


图 10.3 网络 N 的最大流

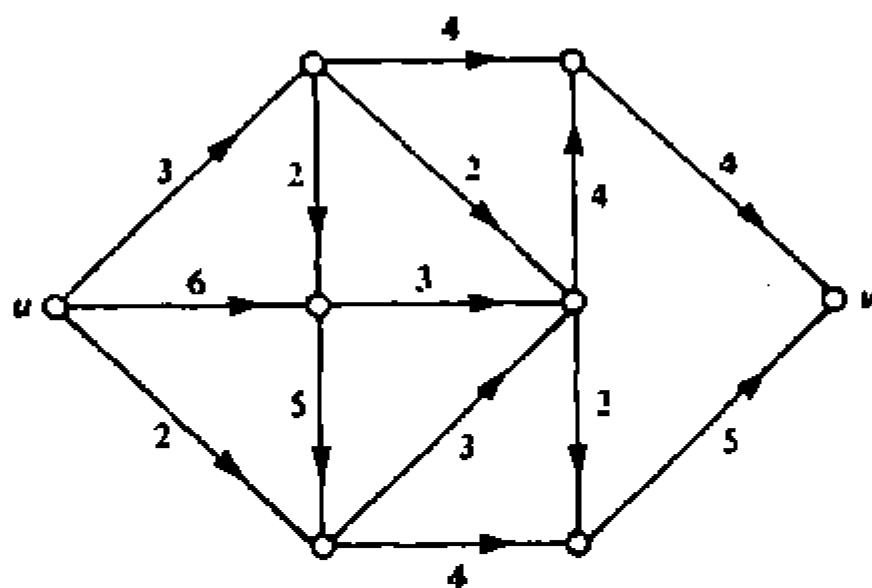
练习

1. 证明：每个网络至少有一个流且至少有一个最大流。

2. 设 N 是下图所示的网络，其中源和汇分别为 u 和 v，且在每条弧上标的数是它的容量。

(a) 给出 N 中流 f 使得 $\mathrm{val}(f)\geq 5$。

(b) 确定最大流 f 的值 $\mathrm{val}(f)$。



3. 设 u 和 v 是有向图 D 的两个不同顶点，B 是 D 的弧子集使得 D 的每条 u—v 有向路至少包含 B 中的一条弧。

(a) 证明：存在形如 $(X,\overline{X})$ 的弧子集使得 $(X,\overline{X})\subseteq B$，这里 $X\subseteq V$，$u\in X$ 且 $v\in\overline{X}$。

(b) 证明：$(X,\overline{X})$ 可以是 B 的真子集。

4. 证明：推论 10.2b。

5. 设网络 $N=(D,u,v,c)$，证明：如果 D 中不包含 u—v 有向路，则网络 N 的最大流的值和最小割的容量都是零。

10.2 最大流最小割定理

我们已经证明了对于网络 N 的流 f 和割 K，如果 $\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}(K)$，则 f 是 N 的最大流且 K 是最小割。在这一节中，我们要证明这个结果的逆命题，即在任何网络 N 中，最大流的值等于最小割的容量。

设网络 $N = (D,u,v,c)$，且 f 是网络 N 的流，如果 D 的半路 $W = w_0a_1w_1a_2w_2\cdots w_{n-1}a_nw_n$ 满足对任意 $1 \leq i \leq n$，

$$f(a_i)\begin{cases} < c(a_i) & \text{如果 } a_i = (w_{i-1},w_i) \\ > 0 & \text{如果 } a_i = (w_i,w_{i-1}), \end{cases}$$

则称半路 W 是 f-未饱和的，否则称为是 f-饱和的。如果 u—v 半路 W 是 f-未饱和的，那么 W 称为 f-可增半路。如果在 u—v 半路 W 上规定半路的方向是由顶点 u 到 v，则与规定方向一致的弧称为正向弧，否则称为反向弧。例如，f 是图 10.2 给出的流，那么 $u(t,u)t(x,t)x(x,y)y(y,v)v$ 是一条 f-可增半路，弧 (x,y) 和 (y,v) 是正向弧，且弧 (t,u) 和 (x,t) 是反向弧。

定理 10.3 给出了可增半路和最大流之间的关系。

定理 10.3 设网络 $N = (D,u,v,c)$，则 N 的流 f 是最大流当且仅当在 D 中不存在 f-可增半路。

证明 首先，假设 f 是网络 N 的最大流，且 D 包含 f-可增半路，即存在 u—v 半路 $P = w_0a_1w_1a_2w_2\cdots w_{n-1}a_nw_n$ 使得对任意 $1 \leq i \leq n$，

$$f(a_i)\begin{cases} < c(a_i) & \text{如果 } a_i = (w_{i-1},w_i) \\ > 0 & \text{如果 } a_i = (w_i,w_{i-1})。 \end{cases}$$

其中：$u = w_0$ 且 $v = w_n$。对任意 $a \in A(P)$，令

$$\varepsilon(a) = \begin{cases} c(a) - f(a) & \text{如果 } a = (w_{i-1},w_i) \\ f(a) & \text{如果 } a = (w_i,w_{i-1}), \end{cases}$$

取 $\varepsilon = \min\{\varepsilon(a) \mid a \in A(P)\}$，则 $\varepsilon > 0$。定义弧集 A 上的函数 f^* 如下：

$$f^*(a) = \begin{cases} f(a) + \varepsilon & \text{如果 } a = (w_{i-1},w_i) \in A(P) \\ f(a) - \varepsilon & \text{如果 } a = (w_i,w_{i-1}) \in A(P) \\ f(a) & \text{如果 } a \notin A(P), \end{cases}$$

那么，显然 f^* 是 A 上的整数值函数使得对任意 $a \in A$，$0 \leq f^*(a) \leq c(a)$，这样 f^* 满足(10.1)。我们证明 f^* 也满足条件(10.2)。设 $x \in V\backslash\{u,v\}$，如果 $x \notin V(P)$，那么 $f^*(x,V) = f(x,V) = f(V,x) = f^*(V,x)$，因此对所有不在 P 上的顶点 x，f^* 满足(10.2)。另一方面，如果 $x \in V(P)$，不妨设 $x = w_i$，那么我们考虑三种情况。

情况 1 $a_i=(w_i,w_{i-1})$ 且 $a_{i+1}=(w_i,w_{i+1})$。此时，记 $A'=(x,V)\setminus\{a_i,a_{i+1}\}$，则

$$\begin{aligned}f^*(x,V)&=f^*(a_i)+f^*(a_{i+1})+\sum_{a\in A'}f^*(a)\\&=f(a_i)-\epsilon+f(a_{i+1})+\epsilon+\sum_{a\in A'}f(a)\\&=f(x,V)=f(V,x)=f^*(V,x),\end{aligned}$$

故在这种情况下(10.2)保持。

对剩下的二种情况以类似的方式能够证明 $f^*(V,x)=f^*(x,V)$。

情况 2 $a_i=(w_{i-1},w_i)$ 且 $a_{i+1}=(w_{i+1},w_i)$。此时与情况 1 类似，只须考虑 $f^*(V,x)$ 并注意 ϵ 的加减方式即可。

情况 3 $a_i=(w_{i-1},w_i),a_{i+1}=(w_i,w_{i+1})$ 或者 $a_i=(w_i,w_{i-1}),a_{i+1}=(w_{i+1},w_i)$。不妨设 $a_i=(w_{i-1},w_i),a_{i+1}=(w_i,w_{i+1})$，此时可得

$$f^*(x,V)=f(x,V)+\epsilon=f(V,x)+\epsilon=f^*(V,x)。$$

这样，我们得到 f^* 是 N 的流，并且

$$\mathrm{val}(f^*)=f^*(u,V)-f^*(V,u)。$$

如果 $a_1=(w_0,w_1)$，那么 $f^*(u,V)=f(u,V)+\epsilon$ 且 $f^*(V,u)=f(V,u)$；如果 $a_1=(w_1,w_0)$，那么 $f^*(u,V)=f(u,V)$ 且 $f^*(V,u)=f(V,u)-\epsilon$。在任何情况下，有 $f^*(u,V)-f^*(V,u)=f(u,V)-f(V,u)+\epsilon$，因此，$\mathrm{val}(f^*)=\mathrm{val}(f)+\epsilon\geq\mathrm{val}(f)$。又因为 $\epsilon\geq1$，所以最后的不等式中严格不等式成立，即 f 不是最大流，矛盾，故定理的必要性成立。

反过来，假设 D 中不存在 f-可增半路，由推论 10.2b，如果我们能找出 N 的割 $K=(X,\overline{X})$ 使得对每条弧 $a\in K$，$f(a)=c(a)$，且对每条弧 $a\in(\overline{X},X)$，$f(a)=0$，那么定理证明将完成(事实上，这个割 K 将是 N 的最小割)。设 X 表示 V 的顶点子集使得对 X 中的每个顶点 x 存在一条 f-未饱和的 u—x 半路，显然，$u\in X$。由假设 N 中不存在 f-可增半路，故 $v\notin X$，令 $K=(X,\overline{X})$ 是 N 的割。对任意 $(y,w)\in K$，因为 $y\in X$，所以存在 N 中的一条 f-未饱和的 u—y 半路 P，因此 $f(y,w)=c(y,w)$，否则向 P 添加一条弧 (y,w) 将得到 f-未饱和的 u—w 半路，这与 $w\notin X$ 的事实矛盾。类似地，如果 $(y,w)\in(\overline{X},X)$，那么 $f(y,w)=0$，这就完成了证明。■

注意：在定理 10.3 的证明中已经提示：设 P 是 f-可增半路，则 1. 如果弧 (x,y) 是 P 的正向弧，那么 $f(x,y)<c(x,y)$；2. 如果弧 (x,y) 是 P 的反向弧，那么 $f(x,y)>0$ 和 3. 沿 P 增加流的过程实际上是将正向弧的流增加 ϵ，而将反 向弧的流减少 ϵ，这种思想在下面的最大流算法和下一章费用最小的可增半路算法中都是非常重要的。下面的定理由 Ford，Fulkerson 得到，且通常称

为最大流最小割定理，由此说明推论 10.2a 的逆是正确的。

定理 10.4(Ford 和 Fulkerson) 在任何网络 N 中，最大流的值等于最小割的容量。

证明 设 f 是网络 $N=(D,u,v,c)$ 的最大流(见第10.1节练习1)，由定理10.3在 N 中不存在 f-可增半路。在定理10.3的证明中已经证明：如果 N 不包含 f-可增半路，那么存在最小割 $K=(X,\overline{X})$ 使得 $(X,\overline{X})$ 的每条弧是 f-饱和的，而 $(\overline{X},X)$ 的每条弧的流量是零，因此 $f(X,\overline{X})=\text{cap}(K)$ 且 $f(\overline{X},X)=0$。由定理10.2得到 $\text{val}(f)=f(X,\overline{X})-f(\overline{X},X)=\text{cap}(K)$。■

为了寻求网络中的最大流和最小割，定理10.3的证明提供了一个基本算法——Ford-Fulkerson 算法，而由 Edmonds 和 Karp 提出的算法是以 Ford-Fulkerson 算法为基础并对它进行修改后得到的，且由 Edmonds-Karp 算法产生了一个好的图论算法。这两个算法提供了在已给流 f 的网络中寻求一条 f-可增半路的系统方法。接下去我们要描述的 Edmonds-Karp 算法是寻求一条最短 f-可增半路，即一条包含弧的数目最少的可增半路。

Edmonds-Karp 算法的基本思想是从网络 $N=(D,u,v,c)$ 的已知流 f 开始(允许是零流)。首先给顶点 u 标号为 $(-,\infty)$，V 中的其它顶点不标号，且记 $L=\{u\}$(注意：集 L 为有序集，即 L 是一个先进先出的顶点队列)。其次，选择顶点队列 L 的第一个顶点 x，此时必须考虑以下三种情况：(i) L 为空集，即没有找到第一个顶点；(ii) 顶点 v 已经标号，即已经找到一条 f-可增半路和 (iii) x 为 L 的第一个顶点。如果情况(i)出现，则不存在 f-可增半路，从而 f 为网络 N 的最大流，算法停止。如果情况(ii)出现，则得到网络 N 的一条 f-可增半路 P，将 P 上的所有正向弧的流值增加 $\epsilon(v)$，而所有反向弧的流值减少 $\epsilon(v)$，其它弧上的流值不变，由此得到网络 N 上的新流 f^* 且 $\text{val}(f^*)=\text{val}(f)+\epsilon(v)$，放弃所有顶点的标号，用 f^* 代替 f，继续这个过程。如果情况(iii)出现，则对任意未标号的顶点 y，当 $(x,y)\in A$ 且 $f(x,y)<c(x,y)$ 时，选择弧 (x,y) 为正向弧，对顶点 y 标号为 $(x^+,\epsilon(y))$，其中：$\epsilon(y)=\min\{\epsilon(x),c(x,y)-f(x,y)\}$，将顶点 y 加入顶点队列 L；当 $(y,x)\in A$ 且 $f(y,x)>0$ 时，选择弧 (y,x) 为反向弧，对顶点 y 标号为 $(x^-,\epsilon(y))$，其中：$\epsilon(y)=\min\{\epsilon(x),f(y,x)\}$，将顶点 y 加入队列 L。最后从顶点队列 L 中删除顶点 x，返回并继续这个过程。

说明：1. 顶点标号的过程事实上是构造有向图 D 的子图 D' 使得 D' 的基础图是树且对任意顶点 $x\in V(D')$，D' 包含的唯一的 u—x 半路是 f-未饱和的，同时也是 D 中最短的 f-未饱和的 u—x 半路。在算法执行过程中，$V(D')$ 为所有已标号顶点且 $(x,y)\in A(D')$ 当且仅当 x 的标号为 $(y^-,\epsilon(x))$ 或者 y

的标号为$(x^+,\varepsilon(y))$。所以,D 中每个顶点必定处于三种状态中的一种:未标号,标号且未检查,或已标号且已检查。最初全部顶点都未标号,当一个顶点收到一个标号时,就将它放到"已标号未检查"的顶点列 L 的最后一个。这些顶点被检查是按"先标号先检查"原则进行,这保证了一条最短 f-可增半路的产生。

2. 利用归纳思想容易理解:如果顶点 x 的标号为$(y^+,\varepsilon(x))$或$(y^-,\varepsilon(x))$,则 $\varepsilon(x)$ 是 D' 中唯一的 f-未饱和的 u—x 半路可增加流的最大值;

3. 当顶点 v 已标号时,由顶点标号的第一个值可以从顶点 v 开始,逆推出 D 的 f-可增半路 P,沿 P 增加流值 $\varepsilon(v)$ 得到 N 的流值更大的流 f^*,这个过程在定理 10.3 的证明中已经详细叙述,这里就不再重复;

4. 由说明 2 可知,如果算法在 f-可增半路 P 上增加了一次流值,那么 P 中至少一条正向弧达到饱和或者至少一条反向弧的流值为零,从而在下一次标号过程中对应弧就不可能继续为正向弧或反向弧,即下一次的 f-可增半路的长不小于 P 的长度。由于 D 的顶点数是有限的,所以算法在有限步结束,且算法的运算次数仅与 D 的结构有关,而与最大流的值无关。事实上,Ford-Fulkerson 算法的运算次数恰好与最大流的值有关。

算法 10A(Edmonds 和 Karp) 给定网络 $N=(D,u,v,c)$。

1. 对 D 的所有弧给定初始流 f。
2. 用$(-,\infty)$标号 u 且把 u 放入顶点队列 L 中;
3. 如果顶点队列 L 为空,则 f 为网络 N 的最大流,算法结束;
4. 如果顶点 v 已标号,则由顶点 v 的标号可产生一条 f-可增半路 $w_0a_1w_1a_2w_2\cdots w_{n-1}a_nw_n$(其中:$u=w_0,v=w_n$)使得对任意 $1\leq i\leq n$,如果 $a_i=(w_{i-1},w_i)$,则顶点 w_i 的标号为$(w_{i-1}^+,\varepsilon(w_i))$;如果 $a_i=(w_i,w_{i-1})$,则顶点 w_i 的标号为$(w_{i-1}^-,\varepsilon(w_i))$。对正向弧的流值增加 $\varepsilon(v)$,对反向弧的流值减少 $\varepsilon(v)$,由此得到网络 N 的流值更大的流 f^*,用 f^* 代替 f,抛弃所有顶点的标号,然后回到第二步;
5. 选择并去掉 L 中的第一个顶点 x,设顶点 x 的标号为$(z^+,\varepsilon(x))$或$(z^-,\varepsilon(x))$,对所有未标号的顶点 y,

   (a) 如果$(x,y)\in A$ 且 $f(x,y)<c(x,y)$,则将顶点 y 标号为$(x^+,\varepsilon(y))$,其中:$\varepsilon(y)=\min\{\varepsilon(x),c(x,y)-f(x,y)\}$,并把顶点 y 加入队列 L;

   (b) 如果$(y,x)\in A$ 且 $f(y,x)>0$,则将顶点 y 标号为$(x^-,\varepsilon(y))$,其中:$\varepsilon(y)=\min\{\varepsilon(x),f(y,x)\}$,并把 y 加入顶点队列 L。

   最后,返回第三步。

在算法 0A 结束时，得到的流一定是 N 的最大流。事实上，如果 X 是算法终止时已标号的顶点子集，那么 $(X,\overline{X})$ 是一个最小割。从定理 10.3 得出每次完成第四步，就构造了 N 的具有更大流值的新流。另一方面，在第二步中，如果顶点队列 L 是空集，那么网络 N 不包含 f-可增半路，从而由定理 10.3，f 是最大流，而 $(X,\overline{X})$ 是一个最小割。

作为算法 1 A 的说明，设网络 N 是图 1 . 4a 中给出的网络，其中：源和汇

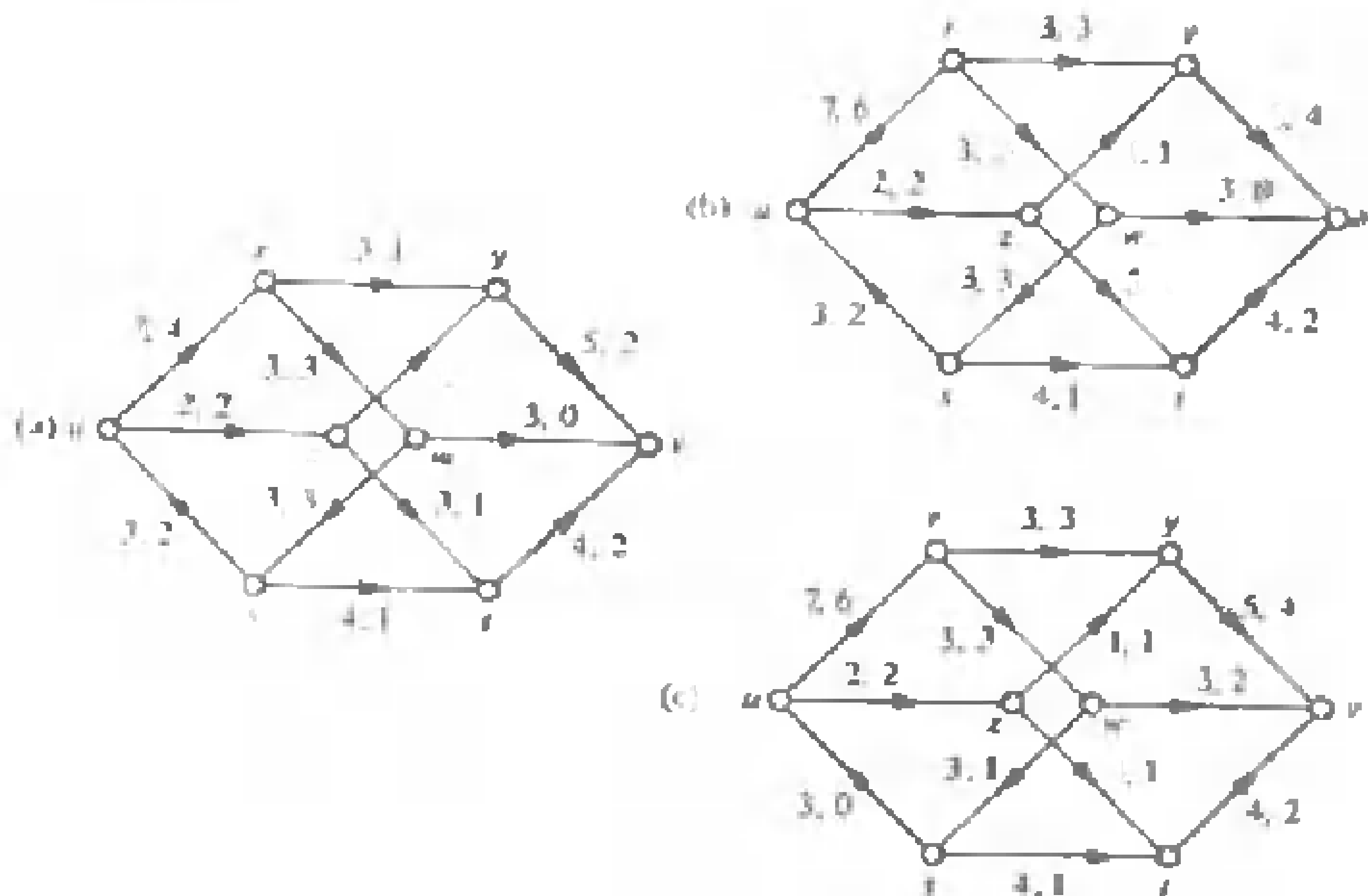


图 10.4

分别为 u 和 v，在每条弧 a 上的标号分别是 a 的容量 $c(a)$ 和初始流 $f(a)$。算法开始时，u 标号为 $(-,\infty)$，且 L 只包含顶点 u，当算法第一次执行第五步的标号过程时，已标号的顶点子集和顶点队列 L 如下：

已标号的顶点	L
$u:(-,\infty)$	u
$u:(-,\infty),r:(u^+,3)$	r
$u:(-,\infty),r:(u^+,3),s:(u^-,2)$	r,s

由于顶点队列 L 不空且顶点 v 未标号，所以算法再次执行第五步，此时，已标号的顶点子集和顶点队列 L 为：

$u:(-,\infty),r:(u^+,3),s:(u^-,2),y(r^+,2)$	s,y
$u:(-,\infty),r:(u^+,3),s:(u^-,2),y(r^+,2),$ $w:(s^-,2)$	y,w

$u:(-,\infty),r:(u^+,3),s:(u^-,2),y(r^+,2),$

$w:(s^-,2),t:(s^+,2)$ $\quad\quad y,w,t$

$u:(-,\infty),r:(u^+,3),s:(u^-,2),y(r^+,2)$

$w:(s^-,2),t:(s^+,2),v:(y^+,2)$ $\quad\quad w,t$

由于顶点 v 已标号，从而算法执行第四步。我们得到 f- 可增半路 $u(u,r)r(r,y)y(y,v)v$，并且在这条半路上的每条弧都是正向弧，每条弧的流值都增加 $\varepsilon(v)=2$，产生的新流 f' 如图 10.4b 所示。

算法执行第二步、第三步、第四步和第五步，直到顶点 v 再次被标号，我们有下面的已标号顶点集：

$u:(-,\infty),r:(u^+,1),s:(u^-,2),w:(s^-,2),t:(s^+,2),v:(w^+,2)$。

运用产生的具有 $\varepsilon(v)=2$ 的可增半路 $u(s,u)s(w,s)w(w,v)v$，我们得到图 10.4(c) 所给出的流 f'。

再由第二步开始，我们得到已标号的顶点为：

$$u:(-,\infty),r:(u^+,1),$$

不过，当第五步选择的顶点 $x=r$ 时，从 L 中去掉 r，第五步的标号过程没有产生任何新的已标号顶点；接着执行第三步，发现顶点队列 L 是空集，此时得到网络的最大流和相应最小割 $(X,\overline{X})$，其中 $X=\{u,r\}$。

在网络和网络流的定义中，可以稍加改变允许非负实值容量函数和流，在这种情况下最大流最小割定理仍然有效，不过 Ford-Fulkerson 算法在这种情况下就要失效(可参考 Fulkerson 的文献)，但是上面提到的 Edmonds-Karp 算法可继续使用且仍然是一个好算法。

虽然根据定义我们考虑的网络仅有一个源和一个汇，但在实际应用中，许多问题必须考虑多个源和多个汇的网络流问题，而且将网络进行适当的改造，就可以使用 Edmonds-Karp 算法求出原网络的最大流。下面我们介绍几种特殊网络流问题如何转化为单源单汇的网络流问题。

我们定义更一般的网络 N 是分别有两个非空、不交顶点子集 S 和 T 的有向图 D 和在弧集 A 上的非负整数值函数 c，其中：S 和 T 分别称为网络 N 的源集和汇集，而函数 c 称为 N 的容量函数，记为 $N=(D,S,T,c)$。定义 N 的流 f 是弧集 A 上的整数值函数使得对每条弧 $a\in A$，

$$0\le f(a)\le c(a);$$

对每个顶点 $x\in V\backslash(S\cup T)$，$f(x,V)=f(V,x)$ 且流 f 的值定义为 $\mathrm{val}(f)=f(S,V)-f(V,S)$。

在一般网络中确定最大流的问题能够归入具有单源单汇的网络。设网络 N 是以 $S=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ 为源集，以 $T=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 为汇集，以 D 为基础

有向图且以 c 为容量函数的网络。构造新网络 $N'=(D',u,v,c')$ 使得:1. $u,v \notin V(D)$;2. $V(D')=V(D)\cup\{u,v\}$;3. $A(D')=A(D)\cup\{(u,u_i)\mid 1\le i\le m\}\cup\{(v_i,v)\mid 1\le i\le n\}$;4. 对任意 $1\le i\le m$ 和 $1\le j\le n$,$c'(u,u_i)=c'(v_j,v)=+\infty$ 且 5. 对任意 $a\in A(D)$,$c'(a)=c(a)$。

如果 f 为网络 N 的流,则在网络 N' 中可产生对应的流 f',其中 f' 定义如下:

$$f'(a)=\begin{cases} f(a) & a\in A(D)\\ f(u_i,V(D))-f(V(D),u_i) & a=(u,u_i)(1\le i\le m)\\ f(V(D),v_j)-f(v_j,V(D)) & a=(v_j,v)(1\le j\le n)。\end{cases}$$

容易看出,f' 是网络 N' 中的流并且

$$\mathrm{val}(f')=\mathrm{val}(f)。\tag{10.4}$$

反之,如果 f' 是 N' 中的流,则对任意 $a\in A(D)$,令 $f(a)=f'(a)$,此时,f 是 N 的流且(10.4)式成立。这就建立了多源多汇的网络 N 的流与单源单汇的网络 N' 的流之间的一一对应关系,因此求解多源多汇的网络 N 的最大流问题可归结为求解单源单汇的网络 N' 的最大流问题。因为弧 $(u,u_i)(1\le i\le m)$ 和弧 $(v_j,v)(1\le j\le n)$ 的容量都是 $+\infty$,故网络 N' 的最小割不可能包含这些弧中的任何一条,从而 N' 的最小割必是 N 的最小割,所以最大流最小割定理对多源多汇的网络 N 仍然成立。

下面我们讨论另外一类网络流问题。设 D 是有向图且顶点集为 V,弧集为 A,顶点 u 和 v 分别为源和汇,$(u,v)\notin A$ 且 $I=V\setminus\{u,v\}$。假定对任何 $w\in I$,定义非负整数值的容量函数 $c(w)$。这样就得到顶点有容量限制而弧没有容量限制的网络 N。这时网络 N 中的流是指定义在 N 的弧集 A 上的非负整数值函数 f 使得对任意 $w\in I$,

$$f(w,V)=f(V,w)\le c(w),\tag{10.5}$$

(10.5)表示在每个中间顶点,流 f 满足守恒条件和顶点容量约束条件。

对应于上述网络 N,构造新网络 N' 如下:把 N 的每个中间顶点 w 拆为两个顶点 w^- 和 w^+,用弧 (w^-,w^+) 连接并规定 (w^-,w^+) 的容量为 $c(w)$,为了叙述方便,约定 $u=u^+=u^-$ 且 $v=v^+=v^-$;对 N 的每条弧 (x,w),对应 N' 的弧 (x^+,w^-) 且规定 (x^+,w^-) 的容量为 $+\infty$。如果 f 为网络 N 的流,则规定 N' 的流 f' 如下:对任意顶点 $w\in V$,$f'(w^-,w^+)=f(w,V)$;对任意 $(x,y)\in A$,$f'(x^+,y^-)=f(x,y)$。反之,如果 f' 是 N' 的流,则对 N 的任意弧 $(x,y)\in A$,令 $f(x,y)=f'(x^+,y^-)$。这就建立了 N 的流 f 与 N' 的流 f' 之间的一一对应关系。

由于 $(u,v)\notin A$,所以对单源单汇的网络 N',N' 的流值是有限的,且最大

流最小割定理成立。如果 N 的中间顶点集合 $I=\{w_1,w_2,\cdots,w_m\}$，$X=\{u,w_1^-,w_2^-,\cdots,w_m^-\}$ 且 $\overline{X}=\{v,w_1^+,w_2^+,\cdots,w_m^+\}$，则 $(X,\overline{X})$ 是 N' 的割且 $c'(X,\overline{X})=\sum_{i=1}^{m}c'(w_i^-,w_i^+)$ 是有限值。由于 N' 中除了从中间顶点演化出来的弧 $(w_1^-,w_1^+),(w_2^-,w_2^+),\cdots,(w_m^-,w_m^+)$ 以外，其它弧的容量都是 $+\infty$，故 N' 的最小割是 N' 中由形如 (w^-,w^+) 的某些弧构成的弧子集，除去这个弧子集以后，N' 中不再有 $u—v$ 有向路，且这个弧子集中各条弧的容量之和最小。因此，如果对顶点有容量限制的网络 N，定义顶点割 B 是 D 的顶点子集使得 $D-B$ 中不存在 $u—v$ 有向路，且顶点割的容量定义为顶点割中所有顶点的容量之和，那么网络 N 的最大流最小割定理可陈述为：

设 N 是源和汇分别为顶点 u 和 v 的网络，且 I 为满足条件(10.5)的中间顶点子集，则网络 N 的最大流的值等于顶点割的最小容量。

另一类可能遇到的网络流问题是对网络 N 的所有弧和所有中间顶点都有容量限制，即网络 N 的流是指定义在 N 的弧集 A 上的非负整数值函数，它在 A 上满足相容条件(10.1)，且在每个中间顶点满足守恒条件和相容条件(10.5)，那么只须修改网络 N' 的定义使得对任意 $(x,y)\in A$，$c'(x^+,y^-)=c(x,y)$，类似可得网络 N 的流与网络 N' 的流之间的一一对应关系。如果定义 N 的混合割是 N 的某些中间顶点和某些弧所构成的集合使得除去这个集合的所有元素后 N 中不再有 $u—v$ 有向路，且定义混合割的容量为其中各元素的容量之和。不难看出对定义的这种网络 N，最大流最小割定理可陈述为：

设 N 是每个中间顶点和每条弧都有容量约束的网络，则网络 N 的最大流的值等于混合割的最小容量。

练习

1. 在定理 10.3 的证明中，证明：情况 2 和情况 3。

2. 证明：推论 10.2b 的逆是正确的，即设 N 是具有容量函数 c 的网络，从而证明，如果 f 是 N 的最大流且 $(X,\overline{X})$ 是最小割，则

$$f(a)=\begin{cases}c(a) & \text{如果 } a\in(X,\overline{X})\\ 0 & \text{如果 } a\in(\overline{X},X).\end{cases}$$

3. 设 N 是具有容量函数 c 的网络，且 $(X,\overline{X})$ 是 N 的最小割。

(a) 证明或否定：如果 f_1 和 f_2 是 N 的流且在割 $(X,\overline{X})$ 和弧集 $(\overline{X},X)$ 的每条弧上流值相等，那么 f_1 和 f_2 是 N 的最大流。

(b) 证明或否定：如果 f_1 和 f_2 是 N 的最大流，那么 f_1 和 f_2 在割 $(X,\overline{X})$ 和弧集 $(\overline{X},X)$ 的每条弧上流值相等。

4. 由图 10.2 中的流开始，并运用算法 10A 求最大流和相应的最小割。

10.3 循环流

上两节我们研究的网络都是有源和有汇的，现在考虑另一种特殊网络，这种网络无源也无汇。

设 N 是具有基础有向图 $D=(V,A)$ 的网络，l 和 c 是定义在 A 上的非负整数值函数且对任意 $a\in A$，$l(a)\leq c(a)$，分别称 l 和 c 为下容量函数和上容量函数，如果定义在 A 上的函数 f 满足：

$$f(v,V)-f(V,v)=0 \quad 任意 v\in V，且$$
$$l(a)\leq f(a)\leq c(a) \quad 任意 a\in A，$$

则称 f 为网络 N 的循环流。

易见对一般的网络 N，循环流未必存在。本节主要讨论循环流存在的条件。

首先，考虑在某条特定弧 (x,y)（$(x,y)\in A$）上，$l(x,y)\neq 0$，而在其余弧 a 上有 $l(a)=0$ 的情况。

在 D 中添加两个新顶点 u,v 及弧 $(u,y),(x,v)$，并令

$$c'(x,y)=c(x,y)-l(x,y),$$
$$c'(u,y)=l(x,y),$$
$$c'(x,v)=l(x,y)，且$$
$$c'(a)=c(a) \quad \forall a\in A\backslash\{(x,y)\}.$$

于是得到源为 u，汇为 v，基础有向图为 D' 且容量函数为 c' 的网络 N'，显然，N 存在循环流的充分必要条件是 N' 存在流值为 $\mathrm{val}(f')=l(x,y)$ 的流 f'（实际上是最大流）。

事实上，若 f' 是 N' 上 $\mathrm{val}(f')=l(x,y)$ 的流，令

$$f(a)=\begin{cases} f'(x,y)+l(x,y) & a=(x,y) \\ f'(a) & \forall a\in A\backslash\{(x,y)\}. \end{cases}$$

从而得到网络 N 的循环流 f。

反之，若 f 是 N 的循环流，则令

$$f'(a)=\begin{cases} f(x,y)-l(x,y) & a=(x,y) \\ l(x,y) & a=(u,y) \\ l(x,y) & a=(x,v) \\ f(a) & \forall a\in A\backslash\{(x,y)\}. \end{cases}$$

则 f' 是 N' 的流且 $\mathrm{val}(f')=l(x,y)$。

定理 10.5（循环流存在定理，Haffman） 设 N 是具有基础有向图 $D=$

(V,A)，下上容量函数分别为 l 和 c 的网络，N 中存在循环流当且仅当对任意顶点子集 $X\subseteq V$，有 $c(X,\overline{X})\geq l(\overline{X},X)$。

证明 根据网络 N，构造新网络 N' 如下：基础有向图 $D'=(V',A')$，$V'=V\cup\{u,v\}$，$A'=A\cup\{(u,x)\mid x\in V\}\cup\{(x,v)\mid x\in V\}$ 且

$$c'(a)=\begin{cases}c(a)-l(a) & \forall\, a\in A\\ l(V,x) & a=(u,x),x\in V\\ l(x,V) & a=(x,v),x\in V。\end{cases}$$

网络 N' 是具有基础有向图 D'，源和汇分别为顶点 u 和 v 且容量函数为 c' 的网络。显然 $(u,\overline{\{u\}})$ 和 $(\overline{\{v\}},v)$ 是网络 N' 的割且容量均为 $l(V,V)$，从而网络 N' 的最大流的值不超过 $l(V,V)$，如果 f' 是网络 N' 的流且 $\mathrm{val}(f')=l(V,V)$，则可构造网络 N 的循环流 f 使得对任意弧 $a\in A$，$f(a)=f'(a)+l(a)$。类似可由网络 N 的循环流 f 构造网络 N' 的流值为 $l(V,V)$ 的流 f' 使得

$$f'(a)=\begin{cases}f(a)-l(a) & a\in A\\ l(V,x) & a=(x,v)\\ l(x,V) & a=(u,x)，\end{cases}$$

故网络 N 存在循环流的充分必要条件是 N' 存在流值为 $l(V,V)$ 的最大流。由最大流最小割定理，N' 存在最小割的容量为 $l(V,V)$。

令 $(X',\overline{X'})$ 是 N' 的任意割且 $X'=X\cup\{u\}$，则

$$\begin{aligned}c'(X',\overline{X'})&=c'(X,\overline{X})+c'(u,\overline{X})+c'(X,v)+c'(u,v)\\&=c(X,\overline{X})-l(X,\overline{X})+l(V,\overline{X})+l(X,V)\\&=c(X,\overline{X})+l(V,V)-l(\overline{X},X)，\end{aligned}$$

故 $c'(X',\overline{X'})-l(V,V)=c(X,\overline{X})-l(\overline{X},X)$，从而 $c'(X',\overline{X'})\geq l(V,V)$ 与 $c(X,\overline{X})\geq l(\overline{X},X)$ 等价。■

为了寻求循环流或者判定循环流不存在，利用定理证明中的方法往往是不实用的。下面我们介绍一种计算方法，

设 $C=w_0a_1w_1a_2w_2\cdots w_{n-1}a_nw_n$ 是 D 的一个半圈（其中：$w_n=w_0$），C 上顶点排列顺序实际上是对 C 的一个定向。如果 f 是 N 的流（不一定是循环流）且满足：

$$f(a_i)\begin{cases}<c(a_i) & \text{如果 } a_i=(w_{i-1},w_i)\\ >l(a_i) & \text{如果 } a_i=(w_i,w_{i-1})，\end{cases}$$

则称 C 是 f-可增半圈，称 $a_i=(w_{i-1},w_i)$ 为顺向弧，即弧的方向和半圈 C 的定向相同，而称 $a_i=(w_i,w_{i-1})$ 为逆向弧，这样 C 中的弧可分成两类，记 C^+ 为顺向弧的集合，C^- 为逆向弧的集合。令

$$\varepsilon_1 = \min_{a \in C^+} \{c(a) - f(a)\},$$

$$\varepsilon_2 = \min_{a \in C^-} \{f(a) - l(a)\},$$

且调整量 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$，显然有 $\varepsilon > 0$。

构造网络 N 的新流 f' 如下：

$$f'(a) = \begin{cases} f(a) + \varepsilon & \forall a \in C^+ \\ f(a) - \varepsilon & \forall a \in C^- \\ f(a) & \forall a \notin C。 \end{cases}$$

不难验证，对任何顶点 $x \in V$，f' 满足：

$$f'(x,V) - f'(V,x) = f(x,V) - f(V,x)$$

$$f(a) < f'(a) \leq c(a) \quad a \in C^+$$

$$l(a) \leq f'(a) < f(a) \quad a \in C^-$$

由此可知，经过在半圈 C 上的调整，使顺向弧的流值增加且不超过弧的上容量，使逆向弧的流值减少且不小于弧的下容量，所以我们可以从网络 N 的任意试行流 f（例如 $f \equiv 0$）开始，保持流 f 的性质：

$$f(x,V) = f(V,x) \text{ 且}$$

$$f(a) \leq c(a) \quad \text{任意 } a \in A。$$

记弧集 $A_0 = \{a \in A \mid f(a) < l(a)\}$，即 A_0 为所有不满足下容量限制的弧。如果 $A_0 = \varnothing$，那么 f 就是循环流。如果 $A_0 \neq \varnothing$，比方说，存在 $(x,y) \in A$ 使得 $f(x,y) < l(x,y)$，则在 N 中找一个 f-可增半圈 $C = w_0 w_1 w_2 \cdots w_{n-1} w_0$ 使得弧 (x,y) 为 C 的顺向弧，那么经过在半圈 C 上流的调整得到网络 N 上的新流 f_1 使得弧 $f_1(x,y) = f(x,y) + \varepsilon$，此时，记 $A_1 = \{a \in A \mid f_1(a) < l(a)\}$，显然 $|A_1| \leq |A_0|$ 且

$$\sum_{a \in A_1} (l(a) - f_1(a)) < \sum_{a \in A_0} (l(a) - f(a))。$$

对流 f_1 重复这个过程直到最后，或者存在 n 使得 $A_n = \varnothing$，故网络 N 存在循环流，或者找不到包含 A_n 的弧为顺向弧的 f_n-可增半圈，此时就可以得到顶点子集 $X \subseteq V$ 使得 $c(X,\overline{X}) < l(\overline{X},X)$，从而网络 N 不存在循环流。

求可增半圈 C 的具体步骤及找不到可增半圈 C 时循环流不存在的论证可用与算法 10A 类似的方式完成。

对于最大流问题，若 N 是有源 u 和汇 v 的网络，我们在 N 中增加一条 (v,u) 弧，并令 $c(v,u) = +\infty$，那么最大流问题便是求使 $f(v,u)$ 最大的循环流 f。

有向图的有向 Euler 回路的存在定理（定理 9.5）也可以利用循环流的存

在定理推出。

给定连通有向图 D,我们令每条弧 a 上,$l(a)=c(a)=1$,那么显然 D 存在有向 Euler 回路等价于网络 D 存在循环流。由定理 10.5,这就等价于对任意 $X\subseteq V$,$c(X,\overline{X})\geq l(\overline{X},X)$。对任意顶点 $x\in V$,令 $X=\{x\}$,则 $c(X,\overline{X})=\mathrm{od}(x)$ 且 $l(\overline{X},X)=\mathrm{id}(x)$,即对任意顶点 $x\in V$,$\mathrm{od}(x)\geq\mathrm{id}(x)$。又因为

$$\sum_{v\in V}\mathrm{od}(v)=\sum_{v\in V}\mathrm{id}(v),$$

所以等价于对任意顶点 $v\in V$,$\mathrm{od}(v)=\mathrm{id}(v)$。

练习

1. 写出求可增半圈 C 的具体步骤。
2. 如网络 N 的基础有向图不存在可增半圈,证明:N 不存在循环流。

10.4 最大流最小割定理的应用

就像在第 10.1 节看到的那样,删去割的弧就“分离”了网络的源和汇。因为 Menger 定理和它的边类似定理都是处理图中分离两个顶点的集,所以这两个定理也许与最大流最小割定理之间存在密切关系就不会使人感到惊奇。现在我们就来考虑这种关系。

Menger 定理为,如果 u 和 v 是图 G 的不同非邻接顶点,那么在 G 中内不交 u—v 路的最多条数等于 G 中 $[u,v]$ 分离集的最小基数。类似,存在“Menger 定理形式”的另外一些定理,例如:定理 2.19 就是 Menger 定理的边形式。事实上,Menger 定理的顶点和边形式都可以平行地推广到有向图,得到 Menger 定理对有向图的顶点和弧形式。上述四个结果都能直接或间接地用最大流最小割定理来证明。以证明 Menger 定理关于图的顶点形式为例,可以概括描述证明的基本思想为:第一步,根据给定的图 G 构造适当的网络 N;第二步,在网络 N 上利用算法 10A 计算最大流;第三步,如果网络 N 的最大流恰好表示 G 中内不交 u—v 路的条数,则网络 N 的最小割就对应 G 的 $[u,v]$ 分离集,从而 G 中内不交 u—v 路的最多条数就不小于 G 中的 $[u,v]$ 分离集的最小基数;第四步,根据内不交 u—v 路和 $[u,v]$ 分离集的定义可知 G 的内不交 u—v 路的最多条数不超过 G 的 $[u,v]$ 分离集的最小基数。故 G 的内不交 u—v 路的最多条数就等于 G 的 $[u,v]$ 分离集的最小基数。

为了给出 Menger 定理在有向图上的推广,下面我们引入涉及到分离的某些术语。设 D 是任意有向图,u 和 v 是 D 的两个不同顶点且 S 是顶点集 V 的

子集，如果 $D-S$ 中不存在 u—v 有向路，则称 S 为 D 的有向[u,v]分离集或者 S 分离顶点 u 和 v，其中 $u,v\notin S$。类似地，如果 S 是有向图 D 的弧子集，且 $D-S$ 中不存在 u—v 有向路，则称 S 为 D 的弧[u,v]分离集或者 S 分离顶点 u 和 v。

定理 10.6（Menger 定理的弧形式） 如果 u 和 v 是有向图 D 的两个不同顶点，那么 D 中弧不交 u—v 有向路的最多条数等于 D 中弧[u,v]分离集的最小基数。

证明 如果 m 表示有向图 $D=(V,A)$ 的弧不交 u—v 有向路的最多条数，而 n 为 D 的弧[u,v]分离集的最小基数，那么显然有 $m\leq n$，因此我们只需要证明 $m\geq n$。

设网络 $N=(D,u,v,c)$ 使得对任意 $a\in A$，$c(a)=1$。由定理 10.4，N 的最大流 f 的值等于最小割 K 的容量。如果我们能够证明 $n\leq \text{cap}(K)$ 且 $\text{val}(f)\leq m$，那么就将完成定理的证明。

因为 K 是网络 N 的割，所以弧子集 K 是 D 的弧[u,v]分离集，因此 $n\leq |K|=\text{cap}(K)$。

由于 f 是弧集 A 上的非负整数值函数且对任意 $a\in A$，$c(a)=1$，所以对任意 $a\in A$，$f(a)=0$ 或 1。设 D_1 是通过删去 D 中所有满足 $f(a)=0$ 的弧 a 得到的有向子图，则对任意 $a\in A(D_1)$，$f(a)=1$。因为 f 是 N 的流，我们知道对每个 $x\in V\backslash\{u,v\}$，$f(x,V)=f(V,x)$，且 $f(u,V)-f(V,u)=\text{val}(f)=f(V,v)-f(v,V)$。又因为对每个 $w\in V$，$f(w,V)=\text{od}_{D_1}(w)$ 且 $f(V,w)=\text{id}_{D_1}(w)$，所以如果 $x\in V\backslash\{u,v\}$，则

$$\text{od}_{D_1}(x)=\text{id}_{D_1}(x) \text{ 且}$$

$$\text{od}_{D_1}(u)-\text{id}_{D_1}(u)=\text{val}(f)=\text{id}_{D_1}(v)-\text{od}_{D_1}(v)。$$

则由定理 9.8：有向图 D_1，从而有向图 D，包含了 $\text{val}(f)$ 条弧不交的 u—v 有向路，因此 $m\geq \text{val}(f)$，故

$$m\geq \text{val}(f)=\text{cap}(K)\geq n。\blacksquare$$

例如，为了确定图 10.5(a) 中有向图 D 的弧不交 u—v 有向路的最多条数 m，构造网络 $N=(D,u,v,c)$ 使得对任意 $a\in A$，$c(a)=1$。我们运用算法 10A 到网络 N 得到图 10.5(b) 所示的最大流 f 和最小割 K，其中 $m=\text{val}(f)=\text{cap}(K)=3$。事实上，$f$ 和 K 表示了有向图 D 的弧不交 u—v 路的最多条数和基数最小的弧[u,v]分离集，且分别为

$$\{P_1=uu_1u_2u_3v, P_2=uu_2v, P_3=uu_5v\} \text{ 和 } \{(u,u_1),(u,u_2),(u_5,v)\}。$$

Menger 定理的边形式的另一个证明（见定理 2.19）实际上能够运用定理

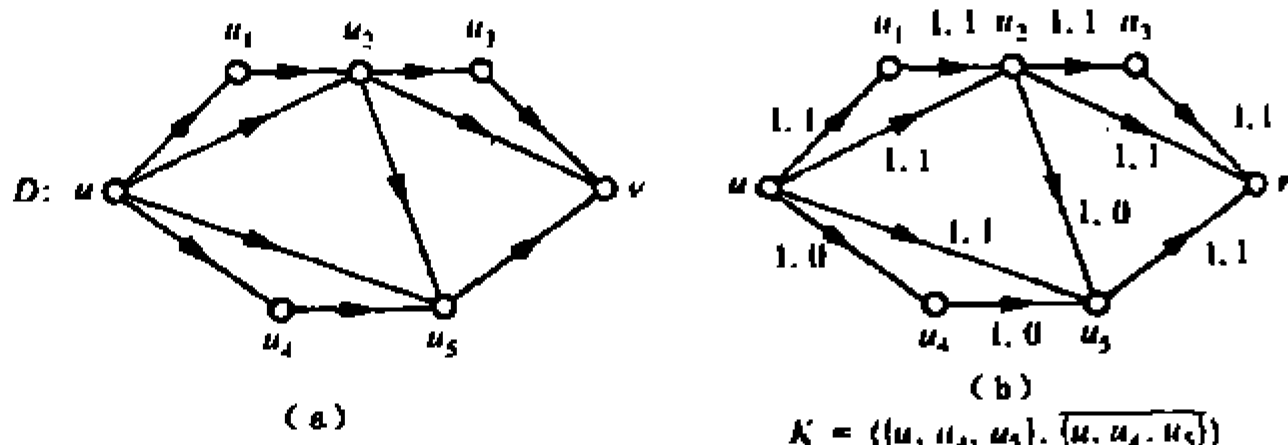


图 10.5

10.4 到对应于已知图 G 的对称有向图 D 来得到，然后如果证明对任意 $u\neq v\in V$，存在 G 的 u—v 路与 D 的 u—v 有向路之间的一一对应关系，则与定理 10.6 的证明类似可得 G 的边不交 u—v 路的最多条数等于 G 的边$[u,v]$分离集的最小基数。

定理 10.7（Menger 定理的边形式） 如果 u 和 v 是图 G 的两个不同顶点，那么 G 的边不交 u—v 路的最多条数等于 G 的边$[u,v]$分离集的最小基数。

我们现在回到 Menger 定理的点形式。在有向图中两条 u—v 有向路 P 和 Q 称为内不交的，如果 $V(P)\cap V(Q)=\{u,v\}$。

定理 10.8（有向的 Menger 定理的点形式） 如果 u 和 v 是有向图 D 的两个不同顶点且顶点 u 不邻接到 v，那么 D 的内不交 u—v 有向路的最多条数等于 D 的有向$[u,v]$分离集的最小基数。

证明 如果 m 是 D 的内不交 u—v 有向路的最多条数且 n 是 D 的有向$[u,v]$分离集的最小基数，那么显然 $m\leq n$，因此我们只需证明 $m\geq n$。

根据 D 构造有向图 $D'=(V',A')$ 使得 $V'=\{u,v\}\cup\{w^-,w^+\mid w\in V\backslash\{u,v\}\}$ 且 $A'=\{(w^-,w^+)\mid w\in V\backslash\{u,v\}\}\cup\{(x^+,y^-)\mid(x,y)\in A\}$，其中 $u=u^-=u^+$ 且 $v=v^-=v^+$。由定理 10.6，如果 m' 是 D' 的弧不交 u—v 有向路的最大条数而 n' 是 D' 的弧$[u,v]$分离集的最小基数，那么 $n'=m'$，因此，只要证明 $n\leq n'$ 和 $m'\leq m$。

设 B 是 D' 的弧$[u,v]$分离集且 $|B|=n'$，注意到 B 没有关联到 u 或从 v 关联的弧，所以可对每条 $a\in B$，定义 w_a 如下：无论 $a=(u,x^-)$ 或者(x^-,x^+) 或者(y^+,x^-) 或者(x^+,v)，其中 $x,y\in V\backslash\{u,v\}$，总取 $w_a=x$。设 $W=\{w_a\mid a\in B\}$，那么 $W\subseteq V\backslash\{u,v\}$，且 $|W|\leq|B|=n'$。又如果 $D-W$ 中存在 u—v 有向路 $P=w_0w_1\cdots w_k$，其中 $u=w_0$ 且 $v=w_k$，那么 $P'=w_0w_1^-w_1^+w_2^-\cdots w_{k-1}^+v$ 是 D' 的 u—v 有向路，由 B 是 D' 的弧$[u,v]$分离集可知 $B\cap A(P')\neq\varnothing$，从而存在 $1\leq i<k$ 使得 $w_i\in W$，与 $V(P)\cap W=\varnothing$ 矛盾，

故 W 是 D 的$[u,v]$分离集且 $n \leq |W| \leq n'$。

又因为对任意 $w \in V' \backslash \{u,v\}$，$od_{D}(w^-) = 1$ 且 $id_{D}(w^+) = 1$，而且$(u,v) \notin A$，所以 D' 的 u—v 有向路与 D 的 u—v 有向路之间存在一一对应关系。根据 D' 的构造方式可得 D' 的两条 u—v 有向路是弧不交的当且仅当 D 对应的 u—v 有向路是内不交的，从而 $m \geq m'$，故

$$m' = m = n = n'。■$$

如果 D 是图 10.6(a) 中的有向图，那么为了确定有向图 D 的内不交 u—v 有向路的最多条数 m，我们必须构造图 10.6(b) 所示的有向图 D'。然后我们运用算法 10A，求得 D' 的弧不交 u—v 有向路的最多条数是 1，从而 $m' = 1$。事实上，我们能够运用算法 10A 求出 D' 的弧不交 u—v 有向路的最大基数集，即 $\{P_1 = uu_2^- u_2^+ v\}$ 和基数最小的弧$[u,v]$分离集$\{(u_2^-, u_2^+)\}$，这就产生了有向图 D 的一条 u—v 有向路 uu_2v 和有向$[u,v]$分离集$\{u_2\}$。

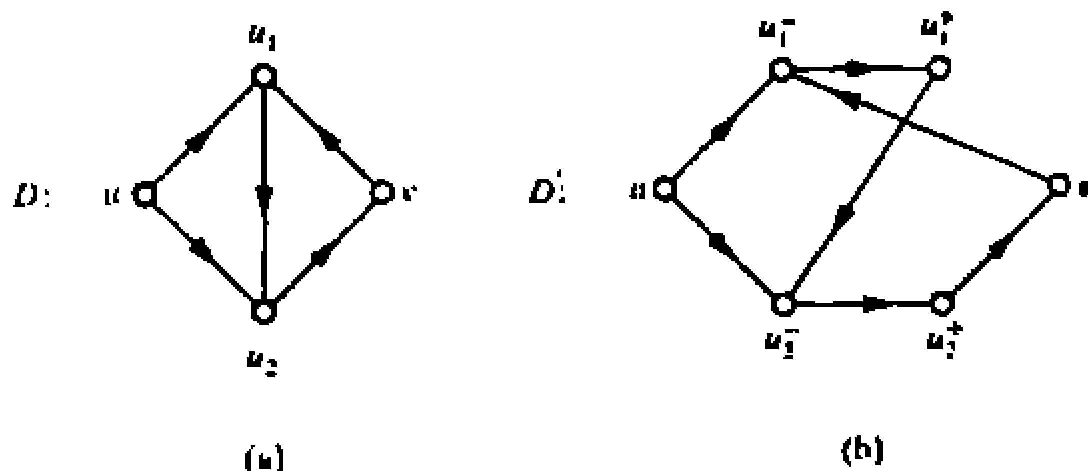


图 10.6

Menger 定理的无向点形式也能运用定理 10.8 到对应于已知图的对称有向图来得到。

定理 10.9(Menger 定理的无向点形式) 如果 u 和 v 是图 G 中两个不同非邻接顶点，那么 G 的内不交 u—v 路的最多条数等于 G 的$[u,v]$分离集的最小基数。

有趣的是注意到 Menger 定理的有向点形式正是由 Robacker 在最大流最小割定理证明中所使用的基本工具。

在本章即将结束的时候，为了进一步说明最大流最小割定理的应用，作为例子来证明定理 6.9。

例 如果 G 是二部图，则 $\alpha(G) = \beta'(G)$

我们只要证明 $\beta'(G) \geq \alpha(G)$。假设 G 有部份集 V_1 和 V_2，构造基础有图 $D = (V(D), A(D))$

其中 $V(D) = V(G) \cup \{u,v\}$　　$A(D) = \{(u,v_1)\} | v_1 \in V_1\} \cup \{(v_2,$

$v)|v_2 \in V_2\} \cup \{(v_1v_2)|$ 如 $v_1v_2 \in E(G)\}$，并在 $A(D)$ 上如下定义容量函数 c。

$$c(a) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } a = (u,x) \text{ 或 } a = (x,v) \text{ 对某个 } x \in V_1 \cup V_2 \\ |V_1| + 1 & \text{否则} \end{cases}$$

网络 $N = (D,u,v,c)$，由最大流最小割定理 N 的最大流 f 的值等于一个最小割 $K = (X,\overline{X})$ 的容量。如果我们能够证明 $\beta'(G) \geq \mathrm{val}f$ 和 $\mathrm{cap}K \geq \alpha(G)$ 则这个证明就可完成。因为对于 $a = (u,x)$ 或 $a = (x,v)$ 有 $c(a) = 1$ 故 $f(a) = 0$ 或 1。此外，因为 $f(x,V(D)) = f(V(D),x)$ $x \in V(D)$，所以对 D 的每条弧有 $f(a) = 0$ 或 1。假设 $\mathrm{val}f = m$，这样存在 V_1 的不同顶点 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 故得 $f(u,u_i) = 1, 1 \leq i \leq m$，所以 $f(u_i,V_2) = 1, 1 \leq i \leq m$，且却好存在一个顶点 $w_i \in V_2$ 使得 $(u_i,w_i) \in A(D)$，且 $f(u_i,w_i) = 1$，因为 $c(w_i,v) = 1, 1 \leq i \leq m$，我们得到如果 $i \neq j$ 那么 $w_i \neq w_j$。这样，$\{u_iw_i|1 \leq i \leq m\}$ 是 G 的一个边独立集，从而 $\beta'(G) \geq m = \mathrm{val}f$。

设 $A = V_1 \cap \overline{X}$ 且 $B = V_2 \cap X$，由 D 的定义方式，则

$K = (u,A) \cup (V_1 - A, V_2 - B) \cup (B,v)$

然而，因为 $\mathrm{cap}K \leq |V_1|$ 和 $c(a) = |V_1| + 1, a \in (V_1 - A, V_2 - B)$，我们有 $(V_1 - A, V_2 - B) = \varnothing$。因此 D 中从 V_1 到 V_2 的全部弧或者从 A 的一个顶点关联或者关联到 B 的一个顶点，从而 $A \cup B$ 是 G 的一个点覆盖。又

$$\mathrm{cap}K = c(u,A) + c(B,v) = |A \cup B|$$

所以 $\mathrm{cap}K = |A \cup B| \geq \alpha(G)$，从而

$\alpha(G) \leq |A \cup B| = \mathrm{cap}K = \mathrm{val}f = \beta'(G)$ ■

例如，为了确定图 10.7(a) 中二部图的最大边独立集和一个最小点覆盖，我们运用算法 10A 到网络 N，该网络以图 10.7(b) 作为基础有向图 D，u 为源，汇为 v 且容量函数 c 满足

$$c(a) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } a = (u,x) \text{ 或 } a = (x,v) \text{ 对某个 } x \in V_1 \cup V_2 \\ 6 & \text{否则.} \end{cases}$$

我们得到图 10.7(c) 中指出的最大流和最小割，从而 $\alpha(G) = \beta'(G) = 4$，就如上述例子证明的那样进行，我们有

$$A = V_1 \cap \overline{X} = \{u_3,u_5\} \text{ 和 } B = V_2 \cap X = \{w_2,w_3\}$$

因此 $\{u_3,u_5,w_2,w_3\}$ 是一个最小点覆盖而 $(u_2w_2,u_3w_5,u_4w_3,u_5w_3)$ 是 G 的一个最大匹配。

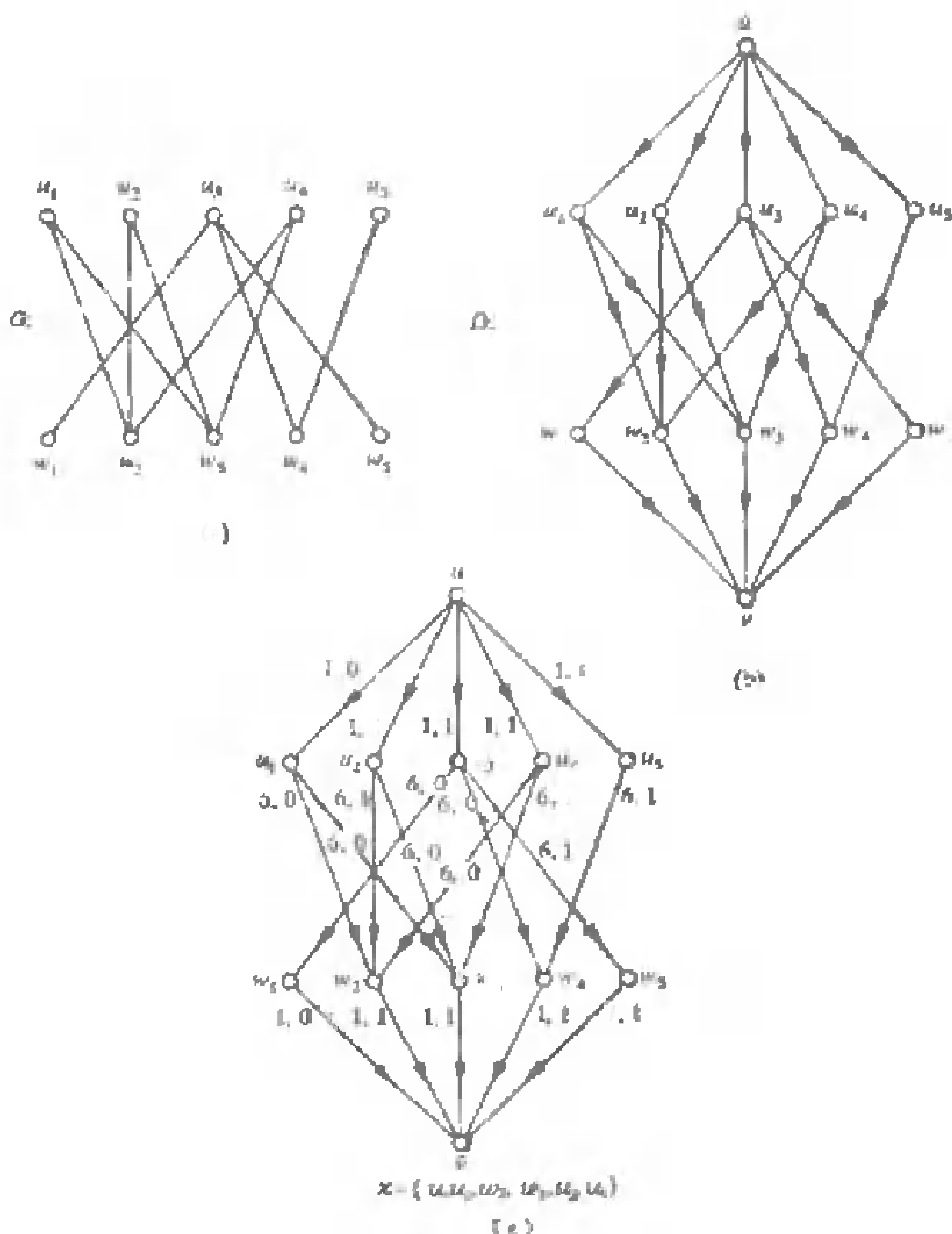


图 10.7 最大边独立集和最小点覆盖

练习

1. 运用定理 10.6，证明：定理 10.7

2. 运用定理 10.8，证明： 理 10.9。

3. 描述一种方法运用算法 10A 来确定 空图的连通度(边 连通度)

11　最小费用流

第十章我们介绍网络流的时候，仅仅涉及到流的值，而没有考虑流的费用。在许多实际问题中，费用的因素是很重要的，例如，在交通运输问题中，往往要求在完成运输任务的前提下，寻求一个使总的运输费用最小的运输方案。这一章我们将考虑网络流的费用问题。

11.1　基本理论

首先，我们给出最小费用流的最一般的概念。设给定有向图 $D=(V,A)$ 以及定义在弧集 A 上的函数 c 和 l 使得对任意 $a\in A$，$0\leq l(a)\leq c(a)$，则称 c 和 l 分别为上容量函数和下容量函数；又设 b 是定义在弧集 A 上的函数且对任意 $a\in A$，$b(a)$ 表示单位货物通过弧 a 的运输费用，则称 b 为费用函数；最后，设 h 是定义在顶点集 V 上的函数使得 $\sum_{v\in V}h(v)=0$，对任意顶点 $v\in V$，$h(v)$ 表示顶点 v 提供的货物数量，当 $h(v)<0$ 时就表示顶点 v 实际上需要得到货物，而且条件 $\sum_{v\in V}h(v)=0$ 表示整个网络的供需达到平衡，则称函数 h 为供需函数。由此得到的网络记为 $N=(D,l,c,h,b)$。

设 f 是定义在网络 N 的弧集 A 上的函数，如果 f 满足条件

$$\begin{cases} f(x,V)-f(V,x)=h(x), & x\in V \\ l(a)\leq f(a)\leq c(a), & a\in A \end{cases}$$

那么称 f 为网络 N 的流，而上述条件就称可行性条件。如果函数 f 同时满足总费用 $b(f)=\sum_{a\in A}b(a)\cdot f(a)$ 最小，则称流 f 为网络 N 的最小费用流。事实上，上述网络的定义是对第十章网络概念的推广，它既包含了单源单汇的网络也包含了多源多汇的网络，只需采用不同形式的供需函数即可。本章主要讨论流的存在条件、最小费用流的性质以及最小费用流的算法。

下面给出几种最常遇到的最小费用最大流问题。

(1) 标准运输问题

设需要对有 m 个产地和 n 个销地的某种物资组织运输，如果 m 个产地为 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 且对应的产量分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，而 n 个销地为 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 且

对应的销售量分别为 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，则供需平衡条件为

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

已知从产地 u_i 到销地 v_j 的单位运输费用为 b_{ij}，要求总费用最小的运输方案，即求一组 $f_{ij}(i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n)$ 满足

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} f_{ij} = x_i, & i = 1,2,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m} f_{ij} = y_j, & j = 1,2,\cdots,n \\ f_{ij} \geq 0, & 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

并且使总费用 $b(f) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_{ij}$ 达到最小，其中 f_{ij} 表示从产地 u_i 运到销地 v_j 的物资数量。上述问题就称为标准运输问题。

我们构造有向图 $D = (V, A)$ 使得 $V = X \cup Y$，其中 $X = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$，$Y = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 和弧集 $A = \{(u_i, v_j) | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$，并令 $c(u_i, v_j) = +\infty, l(u_i, v_j) = 0, b(u_i, v_j) = b_{ij}$ 且 $h(u_i) = x_i, h(v_j) = -y_j(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$），于是得到网络 $N = (D, l, c, h, b)$，标准运输问题就是在网络 N 中求最小费用流问题。

(2) 最小费用最大流问题

已知网络 $N = (D, u, v, c)$，如果对每条弧 $a \in A$ 给出单位运输费用为 $b(a)$，则在流值达到最大的情况下，求网络 N 的最大流 f 使总费用 $\sum_{a \in A} b(a) f(a)$ 最小的问题就称为最小费用最大流问题。

如果在网络 N 上规定对任意 $a \in A, l(a) = 0$；对任意中间顶点 $x \in V \backslash \{u, v\}, h(x) = 0; h(u) = v^*$ 且 $h(v) = -v^*$，其中 v^* 为非负实数，则在新网络上求得的最小费用流就是流值为 v^* 的最小费用流。如果取 v^* 为网络 N 的最大流的流值，则可得到网络 N 的最小费用最大流。

(3) 最小费用循环流

给定无源无汇的网络 $N = (D, l, c)$，如果在弧集 A 上定义了单位运输费用 b，且在顶点集 V 上定义了供需函数 h 使得对任意顶点 $v \in V, h(v) = 0$，则在新网络上的最小费用流就是原网络 N 的最小费用循环流。

在一般网络 N 中，我们用 $b(f)$ 表示流 f 的费用，现在首先研究 N 上最小费用流的判别标准。上一章我们介绍了计算循环流时，对流 f 在 f- 可增半圈上的调整过程，这种方法也可以应用到最小费用流的计算。若 f 是 N 的流，f' 表示在 D 的某个 f- 可增半圈 C 上对 f 作了调整量为 ϵ 的调整后得到的流，则

f' 仍然是网络 N 的流。现在比较流 f 和 f' 的费用，

$$b(f') - b(f) = \sum_{a\in A} b(a)f'(a) - \sum_{a\in A} b(a)f(a)$$
$$= \epsilon\Big[\sum_{a\in C^+} b(a) - \sum_{a\in C^-} b(a)\Big].$$

我们把 $\sum_{a\in C^+} b(a) - \sum_{a\in C^-} b(a)$ 称为半圈 C 的费用，记为 $b(C)$。显然，对半圈 C 的两个不同的定向，$b(C)$ 相差一个负号，为了以后叙述方便，我们约定以后所涉及的半圈都是给定了半圈的定向。由 $b(f') - b(f) = \epsilon \cdot b(C)$ 及 $\epsilon > 0$ 可见：如 f 是最小费用流，则对任意 f- 可增半圈 C，有 $b(C) \geq 0$。我们将证明这个结果的逆也是成立的。

定理 11.1 设 f 是网络 N 的流，则 f 是网络 N 的最小费用流当且仅当对 N 的任意 f- 可增半圈 C 都有 $b(C) \geq 0$（即 N 中不存在负费用的 f- 可增半圈）。

为了证明定理 11.1，我们需要两个引理。

对任意顶点 $v \in V$，我们称流 f 在顶点 v 的净流出 $f(v,V) - f(V,v)$ 为顶点 v 的流量。设 f_1, f_2 是两个在每个顶点的流量相等的流，即对任意顶点 $v \in V$，

$$f_1(v,V) - f_1(V,v) = f_2(v,V) - f_2(V,v)。$$

如果在半圈 C 上满足

$$\begin{cases} f_1(a) < f_2(a), & a \in C^+ \\ f_1(a) > f_2(a), & a \in C^- \end{cases}$$

则称在半圈 C 上 f_2 优于 f_1，记为 $f_1 \prec f_2$ 或 $f_2 \succ f_1$。自然这种“优于”关系是相对于半圈 C 的某个定向而言的。

引理 11.1a 如 f, f' 是两个在每个顶点的流量都相等的不同流，则存在半圈 C 使在 C 上 $f \prec f'$。

证明 由假设 $f \neq f'$，则存在弧 $a_1 = (w_1, w_2)$ 使得 $f(a_1) \neq f'(a_1)$，不妨设 $f(a_1) < f'(a_1)$。考虑顶点 w_2，由假设 f, f' 在顶点 w_2 的流量相等，则或者存在弧 $a_2 = (w_2, w_3)$ 使 $f(a_2) < f'(a_2)$，或者存在弧 $a_2 = (w_3, w_2)$ 使 $f(a_2) > f'(a_2)$。再对顶点 w_3 进行类似讨论，由顶点个数的有限性，故必存在半圈 C 使得对任意 $a \in A(C)$，$f(a) \neq f'(a)$。由 C 的构造方法，存在 C 的定向使在 C 上 $f \prec f'$。■

引理 11.1b 如 f, f' 是两个在每点流量相等的流，则从 f 经有限次在半圈上的调整可以得到 f'。

证明 令 $m = |\{a \in A | f(a) \neq f'(a)\}|$，如 $m = 0$，则 $f = f'$，结论成

立，不妨设 $m \neq 0$。由引理 11.1a，存在半圈 C_1 使 $f \prec f'$。令 f_1 是 f 在半圈 C_1 上的调整，且调整值 $\varepsilon_1 = \min\{|f(a) - f'(a)| \mid a \in A(C_1)\}$，则 $m_1 = |\{a \in A \mid f_1(a) \neq f'(a)\}| \leq m - 1$。重复上述过程，在第 t 次有 $m_t = 0$，即 $f_t = f'$。∎

由引理 11.1b 的证明可知，对任意弧 a，如 $f(a) < f'(a)$，则 $f(a) \leq f_1(a) \leq f_2(a) \leq \cdots \leq f_t(a) = f'(a)$；如 $f(a) > f'(a)$，则 $f(a) \geq f_1(a) \geq f_2(a) \geq \cdots \geq f_t(a) = f'(a)$。这个特性在下面的证明中是非常有用的。

现在我们给出定理的证明，只证明充分性。

定理证明 设 f^* 是网络 N 的任意流，由引理 11.1b，从 f 经有限次调整后可以得到 f^*，设依次在半圈 $C_1, C_2, \cdots, C_t$ 上进行调整，从 f 得到 f^*。

对 C_1 上的任意弧 a，当 $a \in C_1^+$ 时，$f(a) < f^*(a) \leq c(a)$，而当 $a \in C_1^-$ 时，$f(a) > f^*(a) \geq l(a)$，于是 C_1 是 f-可增半圈，由假设 $b(C_1) \geq 0$。

令 f_1 是 f 在 C_1 上作 $\varepsilon_1 = \min\{|f(a) - f^*(a)| \mid a \in A(C_1)\}$ 的调整所得到的流，且 $b(f_1) = b(f) + \varepsilon_1 b(C_1) \geq b(f)$。接下去考虑半圈 C_2，由于在 C_2 上 $f_1 \prec f^*$，即当 $a \in C_2^+$ 时，$f_1(a) < f^*(a)$，而当 $a \in C^-$ 时，$f_1(a) > f^*(a)$，于是当 $a \in C_2^+$ 时，$f(a) \leq f_1(a) < f^*(a) \leq c(a)$，而当 $a \in C_2^-$ 时，$f(a) \geq f_1(a) > f^*(a) \geq l(a)$，于是 C_2 也是 f-可增半圈，故 $b(C_2) \geq 0$，类似地得 $b(f_2) \geq b(f_1)$。重复上述讨论，得到

$$b(f) \leq b(f_1) \leq b(f_2) \leq \cdots \leq b(f_t) = b(f^*),$$

于是 f 是网络 N 的最小费用流。∎

由定理 11.1 可见，如果网络 N 的流 f 是最小费用流，则 f 必须满足可行性条件

$$\begin{cases} f(v,V) - f(V,v) = h(v), & v \in V \\ l(a) \leq f(a) \leq c(a), & a \in A \end{cases}$$

和最优性条件，即网络 N 不存在负费用的 f-可增半圈。因此，我们可以通过不同的方法去计算最小费用流，从而可以得到不同的最小费用流算法。

第一种方法：在计算过程中，总使试行流 f 满足最优性条件，而使 f 逐步地向满足可行性条件过渡，一旦 f 同时满足了可行性条件，即 f 为最小费用流。

第二种方法：在计算过程中，总使试行流 f 满足可行性条件，而使 f 逐步地达到最优性条件，一旦满足了最优性条件，即 f 为最小费用流。

第三种方法，在计算过程中，试行流 f 既不满足可行性条件，也不满足最优性条件。逐步地将 f 向满足可行性条件和最优性条件过渡，一旦 f 同时满足这两个条件，即 f 为最小费用流。

需要指出的是最优性条件有时是通过其它条件去实现的，比如我们可以证明如下定理：

定理 11.2 设网络 $N=(D,l,c,h,b)$ 且 f 是网络 N 的流，如果对每个顶点 $v_i\in V$，存在数 π_i（称为"位势"）使得对任意弧 $a=(v_i,v_j)$ 满足：

$$\begin{cases}\pi_j-\pi_i>b(a)\Rightarrow f(a)=c(a),\\ \pi_j-\pi_i<b(a)\Rightarrow f(a)=l(a),\end{cases} \tag{11.1}$$

则 f 是最小费用流。

证明 若 C 是 f-可增半圈，则当 $a=(v_i,v_j)\in C^+$ 时，有 $f(a)<c(a)$，从而 $\pi_j-\pi_i\le b(a)$；当 $a=(v_i,v_j)\in C^-$ 时，有 $f(a)>l(a)$，从而 $\pi_j-\pi_i\ge b(a)$。这样

$$b(C)=\sum_{a\in C^+}b(a)-\sum_{a\in C^-}b(a)\ge\sum_{(v_i,v_j)\in C^+}(\pi_j-\pi_i)-\sum_{(v_i,v_j)\in C^-}(\pi_j-\pi_i)=0。$$

由定理 11.1，f 是网络 N 的最小费用流。■

练习

某厂按合同规定须于当年每个季度末分别提供 10，15，25，20 台同一规格的柴油机，已知该厂各季度的生产能力及生产每台柴油机的成本如下表所示。如果生产的柴油机在当季不交货，则每台柴油机积压一个季度需储存、维护等费用 0.15 万元。要求在完成合同的情况下，求出该厂全年生产（包括储存、维护）的费用最小的方案。

季度	生产能力	单位成本（万元 / 台）
一	25	10.8
二	35	11.1
三	30	11.0
四	10	11.3

11.2 最小费用最大流和最小费用循环流

设网络 $N=(D,u,v,c)$，如果在 D 的弧集 A 上定义了非负费用函数 b，则求网络 N 的最小费用最大流问题是上节中所介绍的最小费用流的特例。对这个问题，可行性条件就成为：

$$\begin{cases} f(u,V)-f(V,u)=v^* \\ f(x,V)-f(V,x)=0 & x\in V\backslash\{u,v\} \\ f(v,V)-f(V,v)=-v^* \\ 0\le f(a)\le c(a) & a\in A, \end{cases}$$

这里,v^* 是 N 的最大流的流值。

按照计算最小费用流的第一种方法,从网络 N 的一个费用最小的流 f 出发,注意 f 必须是网络 N 的流,即 f 满足对任意 $x\in V(D)\backslash\{u,v\}$, $f(x,V)-f(V,x)=0$ 和对任意弧 $a\in A(D)$, $0\le f(a)\le c(a)$。若 $\mathrm{val}(f)=v^*$ 达到最大,那么 f 就是最小费用最大流;如 $\mathrm{val}(f)<v^*$ 未达到最大,我们设法从 f 过渡到网络 N 的另一个流 f' 使 f' 仍然是费用最小的(相对于所有流量为 $\mathrm{val}(f')$ 的流)且 $\mathrm{val}(f')>\mathrm{val}(f)$。这就是说总得保持流的最优性,而逐步向最大流过渡,一旦得到最大流,那么它就是最小费用最大流。

因为当 b 是非负函数时, $f\equiv 0$ 是流值为 0 的所有流中费用最小的,所以总可以从 $f\equiv 0$ 开始。

我们要解决的主要问题是若 f 是流值为 $\mathrm{val}(f)$ 的所有流中费用最小的,如何从 f 过渡到另一个最小费用的流 f' 且使得流值增加?

我们已经知道,如果 N 是源和汇分别为顶点 u 和 v 的网络,则通过流 f 在 f- 可增半路 P 上的调整,可以得到另一个流。设 f 不是最大流,则必存在 f 的 u—v 可增半路 P,设 f' 为在 P 上调整后得到的流,并设调整值为 ϵ,现考察流 f' 的费用,不难验证:

$$b(f')=b(f)+\epsilon\Big(\sum\nolimits_{a\in P^+}b(a)-\sum\nolimits_{a\in P^-}b(a)\Big),$$

因此, $\sum_{a\in P^+}b(a)-\sum_{a\in P^-}b(a)$ 表示沿 P 增加单位流量需要的费用,这里可增半路 P 的弧子集 P^+ 和 P^- 与可增半圈 C 上的 C^+ 和 C^- 同样定义,我们简称它是 P 的费用,记为 $b(P)$。

利用定理 11.1,我们可以证明如下结论:

定理 11.3 若 f 是网络 N 的流值为 $\mathrm{val}(f)$ 的最小费用流, P 是所有 f-可增半路中费用 $b(P)$ 最小的,设沿 P 的最大调整值为 ϵ, f' 是经过调整后得到的流,则 f' 是流值为 $\mathrm{val}(f')=\mathrm{val}(f)+\epsilon$ 的最小费用流。

我们可以用反证法证明这个定理。根据定理 11.1,若 f' 不是最小费用流,则必存在 f'- 可增半圈 C 使 $b(C)<0$。若 P 与 C 是弧不交的,则 C 也是 f- 可增半圈,但这与 f 是最小费用流的假设矛盾。若 C 与 P 至少有一条公共弧,那么考虑公共弧及 C 的定向的各种可能性,我们可以找到另一条 f- 可增半路使费用小于 $b(P)$,从而导致矛盾。由于列举各种可能并进行分析的过程是繁杂

而令人乏味的，这里就不再详细讨论了。

根据定理 11.3，从一个最小费用流过渡到下一个最小费用流的关键是要寻求最小费用的可增半路。我们可以利用求最短路的方法来实现。

首先注意到，若 P 是 f- 可增半路，那么它的费用是 $b(P)$，根据定义

$$b(f) = \sum_{a\in P^+} b(a) - \sum_{a\in P^-} b(a),$$

因而，如果把 P^- 中的弧 a 改变方向，并且令它的权是 $-b(a)$，而 P^+ 中的弧方向不变，并且令它的权是 $b(a)$，那么 P 就是一条 u—v 有向路，有向路的权恰好是可增半路 P 的费用，这样就把求最小费用的 f- 可增半路的问题转化成求最短 u—v 有向路问题。首先，我们分析一下哪些弧可能在某条 f- 可增半路 P 的 P^+ 中，哪些弧可能在 P^- 中。

设已给网络 N 的流 f，基础有向图 D 中的弧无非是以下三种类型之一：

(1) 若 $f(a) = 0$，则弧 a 只能在 P^+ 中；

(2) 若 $f(a) = c(a)$，则 a 只能在 P^- 中；

(3) 若 $0 < f(a) < c(a)$，则弧 a 既可能出现在 P^+ 中，也可能在 P^- 中。

基于上面分析，我们构造辅助网络 $N_f = (D_f, u, v, c_f, b_f)$ 使得 $V = V(D_f) = V(D)$，且弧集 A_f 以及弧 a 的权 $b_f(a)$ 和容量 $c_f(a)$ 按照如下方法构造：

如 a 是(1) 型弧，则 $a \in A_f$，$b_f(a) = b(a)$ 且 $c_f(a) = c(a)$；

如 a 是(2) 型弧，则 $\bar{a} \in A_f$，$c_f(\bar{a}) = c(a)$ 且 $b_f(\bar{a}) = -b(a)$，其中 $\bar{a}$ 表示 a 的反向弧；

如 a 是(3) 型弧，则弧 $a, \bar{a} \in A_f$，$c_f(a) = c(a) - f(a)$，$c(\bar{a}) = f(a)$，$b_f(a) = b(a)$ 且 $b_f(\bar{a}) = -b(a)$。

于是寻求 D 中最小费用的 f- 可增半路就等价于在 D_f 中寻求最短 u—v 有向路 P_f 且在对应的 f- 可增半路 P 上的最大调整值 $\epsilon = \min\{c_f(a) \mid a \in A(P_f)\}$。为了充分利用辅助网络 N_f 使流值的增加量 ϵ 尽可能大，我们可以得到与定理 11.3 类似的结果。

定理 11.4 设网络 $N = (D, u, v, c, b)$ 且 f 是网络 N 的最小费用流，并设 N_f 为由 f 导出的辅助网络且 f' 是网络 N_f 的最小费用流，如果定义弧集 A 上的函数 f^* 使得对任意 $a \in A$，

$$f^*(a) = \begin{cases} f(a) + f'(a) & \bar{a} \notin A_f \\ f(a) - f'(\bar{a}) & a \notin A_f \\ f(a) + f'(a) - f'(\bar{a}) & \text{其它}, \end{cases} \tag{11.2}$$

则 f^* 为网络 N 的最小费用流且 $\mathrm{val}(f^*) = \mathrm{val}(f) + \mathrm{val}(f')$。

根据定理 11.4，我们可以求出 N_f 中所有的最短 u—v 有向路 $P_1, P_2, \cdots,$

P_m 以及任意有向路 P_i 上的增加值 ϵ_i 使得

$$\sum_{a \in A(P_i)} \epsilon_i \leq c_f(a) \text{ 且}$$

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i$$

达到最大，此时，根据已知的调整值可得到网络 N_f 的最小费用流 f'，由(11.2)对网络 N 的流进行调整，得到网络 N 的流值更大的最小费用流。根据以上分析，我们把求最小费用最大流的步骤归纳如下：

算法 11A（最小费用最大流算法） 已知网络 $N=(D,u,v,c,b)$ 且对任意弧 a，$b(a) \geq 0$。

1. 令 $f \equiv 0$（是流值 $\text{val}(f)=0$ 的最小费用流）；

2. 根据流 f 构造辅助网络 N_f；

3. 利用最短有向路算法，求 N_f 的所有最短 u—v 有向路 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 及在所有有向路上的调整值 $\epsilon_i (1 \leq i \leq m)$，得到网络 N_f 的最小费用流 f' 使得

$$f'(a) = \sum_{a \in A(P_i)} \epsilon_i, \forall a \in A_f$$

4. 如果 $\text{val}(f')=0$，则 f 为最小费用最大流，算法结束，否则根据 f' 对 f 进行调整，得到网络 N 的最小费用流 f^* 使得对任意 $a \in A$，

$$f^*(a) = \begin{cases} f(a) + f'(a) & \bar{a} \notin A_f \\ f(a) - f'(\bar{a}) & a \notin A_f \\ f(a) + f'(a) - f'(\bar{a}) & \text{其它}; \end{cases}$$

5. 放弃辅助网络 N_f，用 f^* 代替 f 并返回第二步。

这个方法把求最小费用最大流的问题化成了一系列求辅助网络上的最短 u—v 有向路问题，但在辅助网络 N_f 中，弧上的权 $b_f(a)$ 可能为负，因此不能直接使用前面介绍的最短有向路算法。接下去的问题就是如何计算弧权可能为负的有向图中的最短有向路，对于这个问题，我们有两种不同的解决方法：1. 根据有向图 D 的权 b，我们定义一个修正权 θ 使对任意 $a \in A$，$\theta(a) \geq 0$，而且用 θ 作为权得到的最短 u—v 有向路等价于权为 b 的最短 u—v 有向路；2. 构造可以直接求 D 的最短有向路的方法。

首先，我们讨论第一种方法。设 $f_{k-1}(a)$ 是第 $k-1$ 次执行步骤 2 时网络 N 的最小费用流，D_{k-1} 是由 f_{k-1} 导出的辅助网络 N_{k-1} 的基础有向图，且 b_{k-1} 是 N_{k-1} 的费用函数，对任意 $x \in V$，令 $b_{k-1}(x)$ 是 D_{k-1} 的最短 u—x 有向路的权。

设第 k 次执行步骤 2 时的最小费用流为 f_k，则对任意弧 $(x,y) \in A_k$，定义弧 (x,y) 的修正权为：

$$\theta_k(x,y) = b_k(x,y) + b_{k-1}(x) - b_{k-1}(y)。 \tag{11.3}$$

不难验证，对任意弧 a，$\theta_k(a) \geq 0$，且关于权 b_k 的最短有向路问题等价于关于权 θ_k 的最短有向路问题。事实上，如 P_x 是 D_k 中的任意 $u—x$ 有向路，则

$$\theta_k(P_x) = b_k(P_x) - (b_{k-1}(x) - b_{k-1}(u)) = b_k(P_x) - b_{k-1}(x), \quad (11.4)$$

这里 $b_{k-1}(x)$ 是与 P_x 无关的常数。

利用修正权，我们可以对算法 11A 进行修改得到下面的算法。

算法 11B(采用修正权的最小费用最大流算法) 已知网络 $N = (D, u, v, c, b)$ 且对任意弧 a，$b(a) \geq 0$。

1. 令 $f_0 \equiv 0$(是流值 $\mathrm{val}(f_0) = 0$ 的最小费用流) 且 $k = 0$；

2. 根据流 f_k 构造辅助网络 N_k；

3. 利用(11.3) 计算 D_k 的修正权 θ_k；

4. 利用最短有向路算法，求 D_k 的所有最短 $u—v$ 有向路 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 及在所有有向路上的调整值 $\varepsilon_i(1 \leq i \leq m)$，得到网络 N_k 的最小费用流 f' 使得

$$f'(a) = \sum_{a \in A(P_i)} \varepsilon_i, \forall\, a \in A_f$$

5. 如果 $\mathrm{val}(f') = 0$，则 f_k 为最小费用最大流，算法结束，否则根据 f' 对 f_k 进行调整，得到网络 N 的最小费用流 f_{k+1} 使得对任意 $a \in A$，

$$f_{k+1}(a) = \begin{cases} f_k(a) + f'(a) & \bar{a} \notin A_k \\ f_k(a) - f'(\bar{a}) & a \notin A_k \\ f_k(a) + f'(a) - f'(\bar{a}) & \text{其它}; \end{cases}$$

6. 根据(11.4)，对任意 $x \in V$，计算 $b_k(x)$。放弃辅助网络 N_k，用 $k+1$ 代替 k 并返回第二步。

在赋权有向图 D 中，如果存在负的弧权且不存在权为负的有向圈，则我们也可直接用迭代法求最短路。为了方便起见，当 $(x, y) \notin A$ 时，令 $b(x, y) = +\infty$，这样，可以认为从任意顶点 x 到任意另一顶点 y 都有弧。

以 $b(v_j)$ 表示最短 $v_1—v_j$ 有向路的权，不难看出 $b(v_1), b(v_2), \cdots, b(v_p)$ 必满足方程：

$$b(v_j) = \min_{v_i \in V}\{b(v_i) + b(v_i, v_j)\}, j = 1, 2, \cdots, p$$

我们可以用如下的迭代方法求这组方程的解。

开始令 $b(v_j) = b(v_1, v_j)$。

一般地，设已有 $\{b_{k-1}(v_j) \mid j = 1, 2, \cdots, p\}$，则对任意 $1 \leq j \leq p$，令 $b_k(v_j) = \min\{b_{k-1}(v_i) + b(v_i, v_j) \mid i = 1, 2, \cdots, p\}$。当对每个 $j(1 \leq j \leq p)$，$b_{k-1}(v_j) = b_k(v_j)$ 时，计算停止，这时 $b_k(v_j)$ 就是最短 $v_1—v_j$ 有向路的权。

实际上，不难验证，$b_i(v_j)$ 是在中间顶点的个数不超过 i 的条件下，最短 $v_1—v_j$ 有向路的权，即 $b_i(v_j) = \min\{b(P) \mid P$ 为满足 $|V(P)| \leq i + 2$ 的 $v_1—v_j$

有向路}。因为 v_1—v_j 有向路上至多有 $p-2$ 个中间顶点，所以计算出 $\{b_{p-1}(v_j)\}$ 时，若至少有一个 j，使 $b_{p-1}(v_j)\neq b_{p-2}(v_j)$，说明有向图 D 中存在权为负的有向圈，因此至多迭代 $p-1$ 次，或者求得方程组的解，或者得到一条权为负的有向圈。

由于在最小费用最大流的计算过程中，每次都保证 f_k 是流值为 $\mathrm{val}(f_k)$ 的最小费用流，从而辅助网络 N_k 中不存在权为负的有向圈，故上述算法可以直接在最小费用最大流的计算过程中使用。

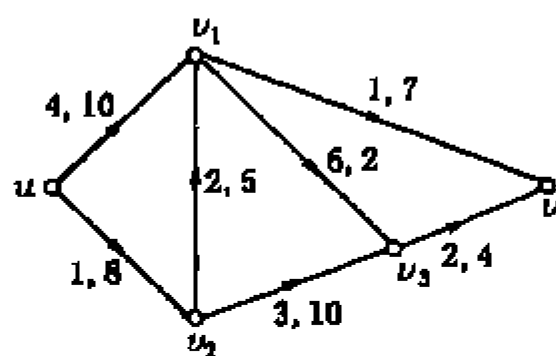


图 11.1

例　在图 11.1 所示网络中，每条弧 a 旁的数是 $b(a)$ 和 $c(a)$，图 11.2 表示了最小费用最大流的计算过程，顶点 x 上的数是从 u 到顶点 x 的距离（即最短 u—x 有向路的权），粗线表示了最短 u—v 有向路。

K	$W(f^{(k-1)})$	$f^{(k)}$
1		
2		
3		
4		
5		$f^{(4)}$ 是最小费用最大流

图 11.2

现在介绍第二种寻求最小费用最大流的方法。

先从网络 N 的任意最大流 f_0 出发。一般地，设已给最大流 f_k，检查每个 f_k- 可增半圈的费用，若所有 f_k- 可增半圈的费用非负，则 f_k 是最小费用最大流，算法结束。否则存在费用为负的 f_k- 可增半圈 C。对 f_k 在可增半圈 C 上做调整，设 f_{k+1} 是 f_k 在 C 上作调整后的流，其中调整值

$$\varepsilon = \min\{\min_{a \in C^+}[c(a) - f_k(a)], \min_{a \in C^-} f_k(a)\},$$

则 f_{k+1} 仍然是网络的最大流，并且 $b(f_{k+1}) < b(f_k)$，对 f_{k+1} 重复上述过程。

类似于第一种方法的分析，如由 f_k 构造的辅助网络为 N_k，则求负费用的 f_k- 可增半圈就等价于在 N_k 中求权为负的有向圈。

因此，第二种方法的计算步骤可归纳如下(Kleim 1967)

(1) 求 N 的最大流 f_0，一般地，若已有最大流 f_k；

(2) 由 f_k 构造辅助网络 N_k；

(3) 在 N_k 中寻求权为负的有向圈。如果没有找到，则 f_k 是最小费用最大流，算法结束，否则 N_k 中存在权为负的有向圈，故得到权为负的 f_k- 可增半圈 C(权为负的有向圈的方向与可增半圈 C 的定向一致)，令 f_{k+1} 是 f_k 在 C 上作 ε 调整后的流，转回到(2)。

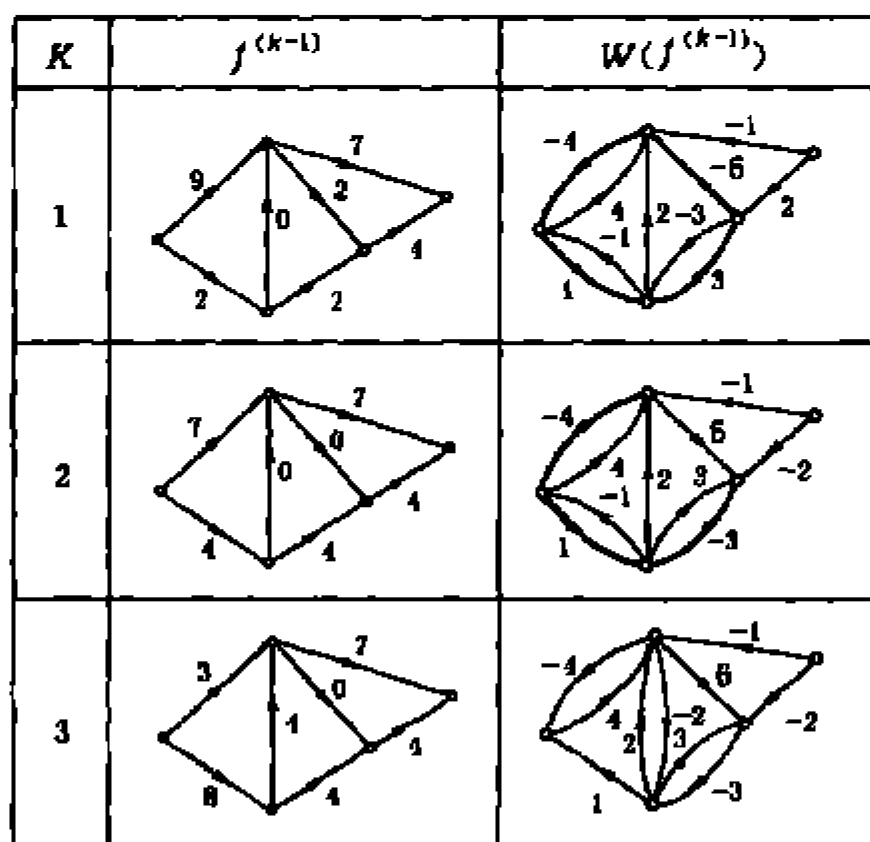


图 11.3

例 求图 11.1 的最小费用最大流。运用第二种方向的计算过程，如图 11.3 所示，粗线表示的是负圈。

最后我们介绍由 Fulkerson 1961 年给出的关于最小费用循环流的一种算法。

已给网络 $N = (D, l, c, b)$，网络 N 的最小费用循环流问题是求流 f 使得

$$f(v, V) - f(V, v) = 0, \quad v \in V \tag{11.5}$$

$$l(a) \leq f(a) \leq c(a), \quad a \in A \tag{11.6}$$

并且总费用 $b(f)=\sum_{a\in A}b(a)f(a)$ 达到最小。

本节的算法基于第三种方法，利用定理 11.2 的条件去判断一个流是否为最小费用流。下面提到的流是指满足(11.5)和(11.6)的循环流。

假设我们给一组位势 $\{\pi_i\}$ 及一个试行流 f(满足(11.5)，但不一定满足(11.6)的流)，则弧集 A 可划分为九类(见图 11.4)。

定义这九个类如下：

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \{a=(v_i,v_j)\in A \mid \pi_j-\pi_i<b(a), f(a)=l(a)\},\\
\beta &= \{a=(v_i,v_j)\in A \mid \pi_j-\pi_i=b(a), l(a)\le f(a)\le c(a)\},\\
\gamma &= \{a=(v_i,v_j)\in A \mid \pi_j-\pi_i>b(a), f(a)=c(a)\},\\
\alpha_1 &= \{a=(v_i,v_j)\in A \mid \pi_j-\pi_i<b(a), f(a)<l(a)\},\\
\beta_1 &= \{a=(v_i,v_j)\in A \mid \pi_j-\pi_i=b(a), f(a)<l(a)\},\\
\gamma_1 &= \{a=(v_i,v_j)\in A \mid \pi_j-\pi_i>b(a), f(a)<c(a)\},\\
\alpha_2 &= \{a=(v_i,v_j)\in A \mid \pi_j-\pi_i<b(a), f(a)>l(a)\},\\
\beta_2 &= \{a=(v_i,v_j)\in A \mid \pi_j-\pi_i=b(a), f(a)>c(a)\} \text{ 且}\\
\gamma_2 &= \{a=(v_i,v_j)\in A \mid \pi_j-\pi_i>b(a), f(a)>c(a)\}。
\end{aligned}
$$

我们把弧集 α,β,γ 中的弧称为合格弧，其余的弧称为不合格弧。

我们的目的是把所有的弧都变为合格弧。

对每条弧 a，给它一个非负数 $\theta(a)$，作为衡量该弧合格与不合格程度的数量指标：

$$
\theta(a)=\begin{cases}
0 & a\in\alpha\cup\beta\cup\gamma\\
l(a)-f(a) & a\in\alpha_1\cup\beta_1\\
c(a)-f(a) & a\in\gamma_1\\
f(a)-l(a) & a\in\alpha_2\\
f(a)-c(a) & a\in\beta_2\cup\gamma_2,
\end{cases}
$$

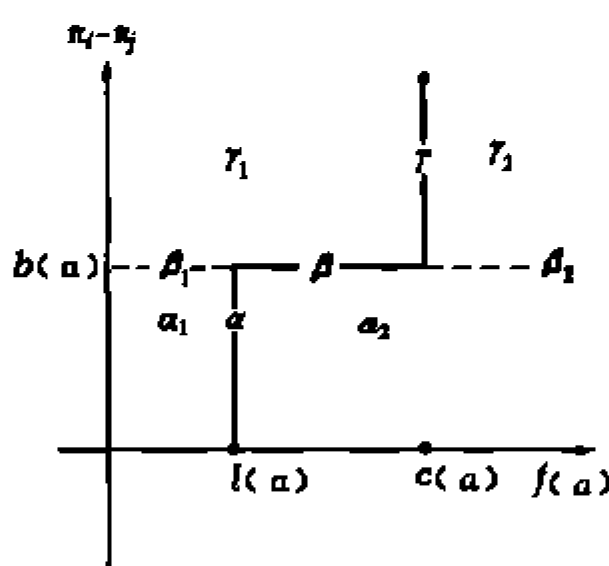


图 11.4

于是不合格弧对应的 $\theta(a)>0$。

方法是从试行流 f 和一组位势 $\{\pi_i\}$ 出发，每步或者改变流，或者改变位势，逐步地使所有弧变为合格弧，最后得到最小费用循环流。

流或位势的改变是利用 Minty 染色定理去实施的，所以我们先介绍这个

定理。

定理 11.5(Minty) 给定有向图 $D=(V(D),A(D))$，用红、蓝、黄三种颜色给 $A(D)$ 的所有弧染色使得如果弧 (u,v) 是红色弧，则如下论断中一个且仅有一个成立。

(1) 弧 (u,v) 包含在某个半圈 C 中，C 是由红、蓝色弧构成（称为红蓝半圈），并且 C 上所有红色弧或者都属于 C^+ 或都属于 C^-。

(2) 弧 (u,v) 包含在染红黄两色的弧集 $(X,\overline{X})\cup(\overline{X},X)$ 中，并且所有红色弧都属于 $(X,\overline{X})$ 或都属于 $(\overline{X},X)$。

证明 首先证明论断(1) 和(2) 不可能同时成立。若不然，设 $C=vv_1v_2\cdots v_kuv$ 是(1) 中红蓝半圈（记 $v=v_0,u=v_{k+1}$），$A=(X,\overline{X})\cup(\overline{X},X)$ 是论断(2) 中染红、黄色的弧集，不妨设 $v\in X$，这样 $(u,v)\in(\overline{X},X)$，设 v_i 是 v_0，$v_1,v_2,\cdots,v_k,v_{k+1}$ 中第一个不属于 X 的顶点 $(1\le i\le k+1)$，这样的 v_i 显然存在，以 a 表示 C 上以 v_{i-1} 和 v_i 为端点的弧。因 $a\in A(C)\cap A$，故必是红色弧。由(1) 推知：$a=(v_{i-1},v_i)$，但由(2) 得到：$a=(v_i,v_{i-1})$，这是一个矛盾。

现在我们构造性地证明论断(1) 和(2) 必有一个成立。开始令 $X_0=\{v\}$，一般地，设已有 X_k，按如下原则在 $A_k=(X_k,\overline{X_k})\cup(\overline{X_k},X_k)$ 中选弧，选 A_k 中的蓝色弧，或 $(X_k,\overline{X_k})$ 中的红色弧，把所选弧的端点放入 X_k 得 X_{k+1}。重复这个过程，进行到某一步，必出现如下情况之一：(1)$u\in X_k$；(2)$u\notin X_k$，而 A_k 中没有可选弧。易见情况(1) 发生时，就得到论断(1) 成立的红蓝半圈 C，而情况(2) 出现时，就得到使论断(2) 成立的红黄弧集 $A=(X,\overline{X})\cup(\overline{X},X)$。■

现在，我们给弧集 $A(D)$ 的每条弧染色。

如果弧 $a=(v_i,v_j)$ 使得 $l(a)<f(a)<c(a)$ 及 $\pi_j-\pi_i=b(a)$，则对 $f(a)$ 的适当增减不会变成不合格弧，我们把弧 a 染成蓝色；

如果弧 $a=(v_i,v_j)$ 使得 $f(a)=l(a)$ 及 $\pi_j-\pi_i=b(a)$ 或 a 是 α_1,β_1 和 γ_1 类弧，则可增大 $f(a)$，而不能减小 $f(a)$（否则合格弧将成为不合格弧，或者不合格弧的不合格程度更大），我们把弧 a 染成红色。

如弧 $a=(v_i,v_j)$ 使得 $f(a)=c(a)$ 及 $\pi_j-\pi_i=b(a)$ 或 a 是 $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$ 类弧，则可减少 $f(a)$，而不增加 $f(a)$，我们把弧 a 改变方向并染成红色。

如弧 $a=(v_i,v_j)$ 使 $f(a)=c(a)$，$\pi_j-\pi_i>b(a)$，或 $f(a)=l(a)$，$\pi_j-\pi_i<b(a)$，则 $f(a)$ 不改变，我们把弧 a 染成黄色。

取一条红色的不合格弧 (u,v)，由定理 11.5，或者存在含 (u,v) 的红蓝半圈 C，或者存在含 (u,v) 的红黄弧集 $A=(X,\overline{X})\cup(\overline{X},X)$。

注意到这样的红蓝半圈 C 或红黄弧集 A 中，可能包含改变了方向的红色弧，为了区别起见我们用 C_R，A_R 来记染色后的半圈和弧集，而以 C，A 记原网

络 D 中相应的半圈和弧集。

如果存在包含 (u,v) 的红蓝半圈 C_R，C_R 上的红色弧与 (u,v) 的方向一致，这就相应地得到了一个可增半圈 C，沿 C 对 f 作适当地调整，调整量为 ϵ，这将使弧 (u,v) 的 $\theta(u,v)$ 或者弧 (v,u) 的 $\theta(v,u)$（视 C_R 中的红弧 (u,v) 是否改变方向而定）减小，而不增大其它弧的 $\theta(a)$。

现在讨论一下 ϵ 值的选取，以 R，B 表示红色和蓝色弧集。

令 $\epsilon_1 = \min\{c(a) - f(a) \mid a = (v_i, v_j) \in R(C^+) \cup B(C^+), \pi_j - \pi_i = b(a)\}$，

$\epsilon_2 = \min\{f(a) - l(a) \mid a = (v_i, v_j) \in R(C^-) \cup B(C^-), \pi_j - \pi_i = b(a)\}$，

这里 $R(C^+)$ 表示 C^+ 中的红弧，其余记号类似定义。

如 $\epsilon \leq \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$，则不会有合格弧变成不合格弧。

令 $\epsilon_3 = \min\{|c(a) - f(a)| \mid a = (v_i, v_j) \in R(C^+) \cup R(C^-), \pi_j - \pi_i > b(a)\}$，

$\epsilon_4 = \min\{|l(a) - f(a)| \mid a = (v_i, v_j) \in R(C^+) \cup R(C^-), \pi_j - \pi_i < b(a)\}$。

如 $\epsilon \leq \min\{\epsilon_3, \epsilon_4\}$，即不要比使不合格弧改变成合格弧所需要的量大，于是令 $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4\} > 0$。

在 C 上，对流 f 作 ϵ 的调整，从而 C 上每条不合格弧的 $\theta(a)$ 下降 ϵ，而合格弧仍是合格弧。

如存在一个红黄弧集 A_R 包含 (u,v)。设 $A_R = (X, \overline{X}) \cup (\overline{X}, X)$，$u \in X$，$v \in \overline{X}$，则 A_R 中所有红弧与 (u,v) 方向相同。

如果把 $\overline{X}$ 中每点的位势增加 φ，则只影响 A_R 中各弧的 $\pi_j - \pi_i$ 值，记 $A^+ = (X, \overline{X})$，$A^- = (\overline{X}, X)$，则由于 $\overline{X}$ 中每点的位势增加了 φ，故 A^+ 的弧的 $\pi_j - \pi_i$ 值增加 φ，A^- 中每条弧的 $\pi_j - \pi_i$ 值减少 φ，只要选取适当的 φ，可使某条弧 $a = (v_i, v_j)$ 的 $\theta(a)$ 减小，而不增大其它弧的 θ 值。

现在讨论一下 φ 的选取，以 R，Y 分别表示红黄弧集。

令 $\varphi_1 = \min\{\pi_j - \pi_i - b(a) \mid a = (v_i, v_j) \in Y(A^-), f(a) = c(a)\}$，

$\varphi_2 = \min\{b(a) - \pi_j + \pi_i \mid a = (v_i, v_j) \in Y(A^+), f(a) = l(a)\}$。

如 $\varphi \leq \min\{\varphi_1, \varphi_2\}$，则不会有合格弧变成不合格弧。

令 $\varphi_3 = \min\{\pi_j - \pi_i - b(a) \mid a = (v_i, v_j) \in R(A^-), l(a) \leq f(a) \leq c(a)\}$，

$\varphi_4 = \min\{b(a) - \pi_j + \pi_i \mid a = (v_i, v_j) \in R(A^+), l(a) \leq f(a) \leq c(a)\}$。

如果 $\varphi \leq \min\{\varphi_3, \varphi_4\}$，即不要使比不合格弧变成合格弧所需要量大。于是令 $\varphi = \min\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$。

如 $\varphi = +\infty$，则每个 $\varphi_i (i = 1,2,3,4)$ 在空集上取值。这时对任意 $a \in (X, \overline{X})$，有 $f(a) > c(a)$；对任意 $a \in (\overline{X}, X)$，有 $f(a) < l(a)$，于是 $c(X, \overline{X}) < l(\overline{X}, X)$，说明网络 N 中不存在循环流。

如 $\varphi = \varphi_3$ 或 φ_4，则至少有一条不合格弧变成合格弧；如 $\varphi = \varphi_1$ 或 φ_2，则至少有一条黄色弧变成红色弧（可能有红色弧变成黄色弧），从而在探寻半圈或弧集 $(X, \overline{X}) \cup (\overline{X}, X)$ 时，X 至少多了一个点。

由上面分析，我们可以把最小费用循环流的计算步骤归纳如下：

开始，给试行流 f（如 $f \equiv 0$）及一组位势 $\{\pi_i\}$（例如 $\pi_i \equiv 0$）。

(1) 染色和选弧。

a. 选一条不合格弧 (u,v)（如无不合格弧，则得最小费用循环流）。

b. 给弧染色（必要时改变弧的方向），利用 Minty 染色定理中的方法选弧，如得红蓝半圈 C_R，转入(2)，否则得红黄弧集 $A_R = (X, \overline{X}) \cup (\overline{X}, X)$，转入(3)。

(2) 改变循环流。由 C_R 确定 ε，令 f' 为 f 作 ε 调整后的流，转入(1)a。

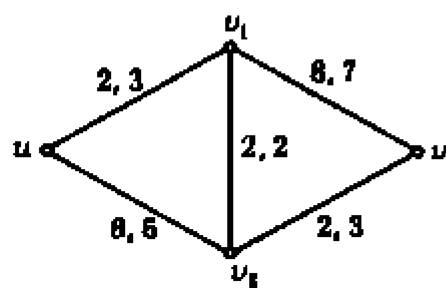
(3) 改变位势。由 A_R 确定 φ，如 $\varphi = +\infty$，则不存在循环流，否则把 $\overline{X}$ 中各点的位势增加 φ。如 (u,v) 变合格弧，则转入(1)a，否则转入(1)b。

最后，我们指出：若不限制 $b(a) \geq 0$，则上述方法仍然是适用的，只是在得到一个红蓝半圈确定 ε 时，可能 $\varepsilon = +\infty$，这表明网络中有负费用的半圈，而半圈上的弧的流量无上界，这样网络中没有有限的最小费用循环流。

练习

1. (1) 证明：由(11.2)定义的修正权 $\theta(v_i, v_j)$ 非负。

(2) 利用修正权的方法解图 11.1 所示的最小费用最大流问题。



2. 设网络 $N = (D, u, v, c)$ 上最大流值为 $\text{val}(f^*)$，已知弧 (v_i, v_j) 上增大单位容量所需的费用 $b(v_i, v_j) \geq 0$，现在要使 N 上的最大流值 $\text{val}(f) > \text{val}(f^*)$，问题是如何增大某些弧的容量，使所需要的总费用最小？叙述解决这个问题的方法。

3. 利用第 2 题，解右上图所示的改善现有网络的问题：

(1) $\text{val}(f) = 9$；

(2) $\text{val}(f) = 16$，图中每条弧旁的数字是弧的容量 $c(a)$ 和费用 $b(a)$。

附录1

符号集

符号	含义	符号	含义
A(D)	有向图弧集	S_k	亏格k的曲面
A(G)	邻接矩阵	V(G)	顶点集
a(G)	点-荫度	V(D)	有向图顶点集
a'(G)	边-荫度	valf	流值
B(G)	关联矩阵	w(e)	边的权
C_n	n阶圈	w(T)	生成树的权
C(G)	闭包	Z(G)	中心
$C_{n+1}(G)$	(n+1)-闭包	α(G)	点覆盖数
c(a)	弧a容量	α'(G)	边覆盖数
capK	割K的容量	β(G)	独立数
D	有向图	β'(G)	边独立数
d(u,v)	距离	Γ(G)	上支配数
$deg_G(v)$或deg(v)	顶点v的度	γ(G)	支配数
diamG	直径	Δ(G)	最大度
E(G)	图的边集	δ(G)	最小度
e(v)	离心率	Θ'(G)	边-厚度或厚度
ex(n;F)	极数	κ(G)	点-连通度
G	图	κ'(G)	边-连通度
g(G)	亏格	υ(G)	叉数
idv	入度	χ(G)	色数
i(G)	下支配数	χ'(G)	边色数
		$\chi(S_k)$	曲面色数
K_n	n阶完全图	ω(G)	团数
K(r,s)or $K_{r,s}$	完全两部图	$\bar{G}$	补图
$K(p_1,p_2,\cdots p_k)$	完全k-部图	G_d	对偶图
$K_{K(k)}$	正则完全k-部图	$G_1\cong G_2$	同构

$k(G)$	分支数	$G_1 \cup G_2$	并
$k_o(G)$	奇分支数	G_1+G_2	联
$M(G)$	匹配	$G_1 * G_2$	笛卡尔积
N	网络	$G_1 \oplus G_2$	因子分解
$N(v), N(U)$	邻域	$H \subseteq G$	子图
$N[v], N[U]$	闭邻域	$H \prec G$	导出子图
odv	出度	$\langle U \rangle$	U 导出子图
p 或 $p(G)$	图的阶	$G-v$	删除一个顶点
P_n	n 阶路	$G-e$	删除一条边
q 或 $q(G)$	图的大小	$G+f$	加上一条边
r	面数	$G \rightarrow (G_1, G_2, \cdots G_k)$	指向
rad	半径	$M_1 \Delta M_2$	对称差
$r(n,m)$	Ramsey 数	$\lceil x \rceil$	表示不小于 x 的最小整数
$r(G_1, G_2, \cdots G_n)$	广义 Ramsey 数	$\lfloor x \rfloor$	表示不大于 x 的最大整数

附录 2

名词索引

（每一术语后列出英语译文以及在本书中初次出现的页码）

三 划

参考文献

1. Chartrand G. and Lesniak L. (1996) Graph and Digraph 3rd end, chapman & Hall, London
2. Foulds, L. R. (1992)Graph Theory Applications, Springer, New York.
3. Bondy, J. A. and Murty, U. S. R. (1976) Graph Theory with Applications, NorthHolland, New York.; 中译本: J. A. 邦迪, U. S. A. 默蒂著,图论及其应用. 科学出版社,1984
4. 田丰,马仲蕃(1987). 图与网络流理论. 科学出版社
5. 陈子岐,朱必文,刘峙山. 图论. 高等教育出版社,1990
6. 魏暹荪编. 图论基础. 陕西师范大学出版社,1991
7. Berge,C(1962)The Theory of Graphs and its Applications,Methuen, London.
8. Ore,O(1963)Graphs and Their Uses,Random House,New York.
9. Beineke,L. W. and Wilson,R. J. (eds)(1978)Selected topics in Graph Theory 1,Academic Press, London.
10. Beineke, L. W. and Wilson, R. J. (eds) (1983) Selected topics in Graph Theory 2,Academic Press,London.
11. Beineke, L. W. and Wilson, R. J. (eds) (1988) Selected topics in Graph Theory 3,Academic Press, London.
12. West, D. B. (1996) Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall, Upper Saddle River,NJ.
13. Chartrand G. and Lesniak, L. (1986) Graphs Digraphs, 2nd edn, Wadsworth & Brooks/Cole, Menlo Park, CA.
14. Berge, C. (1965) Graphs, Second revised edn, North-Holland, New York.
15. Ore, O. and Wilson, R. J. (1990) Graphs and their Uses (updated), Mathematical Association of America, New York.
16. Steinbach, P. (1990) Field Guide to Simple Graphs, Design Lab,

Albuquerque.

17. Wilson, R. J. and Watkins, J. J. (1990) Graphs: An Introductory Approach: A First Course in Discrete Mathematics, John Wiley & Sons, New York.
18. Gould, R. (1988) Graph Theory, Benjamin-Cummings, Menlo Park, CA.

GRAPH THEORY AND
NETWORKS FLOW



